Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
Ano 2017

ANA CARLA OLIVEIRA MAIA NUNES VALENTE MOURATO

MATEMÁTICA E MÚSICA

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
Ano 2017

ANA CARLA OLIVEIRA MAIA NUNES VALENTE MOURATO

MATEMÁTICA E MÚSICA

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para professores, realizada sob a orientação científica da Professora Doutora Andreia Oliveira Hall, Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Para a minha mãe (*in memoriam*)
Para o meu pai (*in memoriam*) que me ensinou a apreciar a beleza da música
Para as minhas filhas e o meu marido

o júri

presidente

Prof. Doutora Ana Maria Reis D'Ázevedo
professora associada da Universidade de Aveiro

Prof. Doutora Carlota Isabel Leitão Pires Simões
professora auxiliar da Universidade de Coimbra (arguente)

Prof. Doutora Andreia Oliveira Hall
professora associada da Universidade de Aveiro (orientadora)

agradecimentos

Para a elaboração desta dissertação contribuíram, de várias formas, algumas pessoas, às quais não posso deixar de agradecer. Agradeço a todos os meus amigos que me foram incentivando a continuar e, mesmo nas alturas mais complicadas em que apetecia desistir nunca me deixaram fazê-lo.
Agradeço ao meu marido, João Mourato, pelo seu apoio incondicional.
Agradeço também à minha orientadora, Professora Doutora Andreia Hall, por toda a ajuda que me deu. Sem a sua ajuda este trabalho não teria chegado ao fim.

palavras-chave Matemática, música e som.

resumo

Nesta dissertação será feita uma incursão ao mundo da música através da matemática. Mostraremos como é possível compreender diversos conceitos musicais que são construídos sobre alicerces matemáticos.
Como professores, será possível, em sala de aula, com a realização de atividades aqui propostas, mostrar aos alunos aplicações práticas da matemática, fomentar o gosto pela disciplina, desenvolver o raciocínio matemático bem como a capacidade de resolução de problemas.

keywords

Maths, music and sound.

abstract

In this paper, an incursion will be done to the world of music through mathematics. It will be shown how it is possible to understand many musical concepts which are built on mathematical foundations.
As teachers, it will be possible, in the classroom and by using the activities here proposed, to show the students practical uses for mathematics; to increase the interest in the subject; to develop mathematical thinking as well as the ability to solve problems.

Introdução

“Um trabalho matemático é, para quem o sabe ler,

o mesmo que um trecho musical para quem o sabe ouvir,

um quadro para quem o sabe ver, uma ode para quem a sabe sentir.”

Gomes Teixeira (1851-1933)

A associação entre a matemática e a música é conhecida desde há muito tempo, essencialmente a partir da antiguidade grega. A matemática está na base da evolução da música ao longo dos séculos, seja na construção das escalas musicais ou na composição de obras musicais, seja na construção de instrumentos musicais, entre muitas outras ligações.

A matemática e a música usam um sistema de notação especializado: para executar uma partitura um músico tem de reconhecer símbolos próprios e, de seguida, convertê-los numa ação motora; a matemática consiste numa representação de padrões, bem como relações, através de símbolos personalizados. A representação gráfica da música é feita numa partitura recorrendo a diversos símbolos musicais. Na partitura, a passagem do tempo (ritmo/duração) faz-se da esquerda para a direita (matematicamente eixo das abcissas), enquanto que a melodia (altura do som/frequência) é representada no eixo vertical (eixo das ordenadas). Os conceitos matemáticos são, portanto, evidentes na sequência das notas em função do tempo (melodia e ritmo).

“O gosto pela Matemática e pela redescoberta das relações e dos factos matemáticos – que muitas vezes é apresentado como uma finalidade isolada – constitui um propósito que pode e deve ser alcançado através do progresso da compreensão matemática e da resolução de problemas.” (“Programa e Metas Curriculares para o Ensino Básico”, pg. 2, 2013). Pretende-se nesta dissertação servir este propósito, isto é, desenvolver o gosto pela matemática através da exploração de diversas ligações entre esta ciência e a música, forma de arte que os alunos gostam. Outro objetivo desta dissertação é a elaboração de fichas de trabalho que permitam, em sala de aula, a abordagem de diversos conceitos matemáticos através da música.

Nesta dissertação serão explorados diversos conceitos musicais básicos, tais como a noção física de som, as escalas musicais, assim como alguns recursos composicionais frequentemente utilizados em diversas obras musicais, sempre com o objetivo de proporcionar uma abordagem diferente da matemática, uma abordagem prática e intuitiva, no sentido de fomentar nos alunos o gosto pela disciplina e a sua capacidade para resolver problemas.

No primeiro capítulo serão explanados alguns dos conteúdos matemáticos que irão ser trabalhados posteriormente, em contexto musical, tais como, o conceito de proporção, o número de ouro, as funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas, as isometrias entre outros. Todos estes conteúdos fazem parte do Programa e Metas Curriculares Matemática do Ensino Básico, e/ou do Programa e Metas Curriculares Matemática A do Ensino Secundário, atualmente em vigor.

No segundo capítulo será abordado o conceito físico de som e a sua relação com as funções trigonométricas e logaritmicas.

Seguidamente, no terceiro capítulo, serão abordados diversos conceitos musicais, tais como o conceito de notação musical, compasso e intervalo. Neste capítulo será, também, realizada uma incursão pela construção das escalas musicais (divisões da oitava), desde a escala Pitagórica até à escala temperada, a mais utilizada hoje em dia, explorando ainda dois instrumentos antigos, o monocórdio e o mesolábio, muito importantes, na sua época, na divisão do intervalo de oitava em várias partes iguais.

A relação entre a proporção áurea e a música será o tema abordado no quarto capítulo. Aqui importa analisar diversas situações onde a proporção áurea está presente, tais como a elaboração de instrumentos musicais e a composição musical.

No quinto capítulo far-se-á uma análise de diversas simetrias e isometrias presentes em várias composições musicais. Esta análise, nem sempre fácil de ser realizada, é muito importante para a compreensão de diversas obras de alguns compositores. Bach foi uma dos compositores que utilizou imensas isometrias e simetrias nas suas composições.

No sexto e último capítulo, será abordada a aleatoriedade vs o determinismo na música, através de diversos exemplos. Serão abordados os jogos de dados musicais de Mozart, utilizados no século XVIII, e feita uma pequena incursão à música minimalista e à música estocástica, esta última através do compositor Ianis Xenakis.

Incluídas em todos os capítulos (com exceção obvia do primeiro) encontram-se atividades práticas para aplicação na sala de aula de matemática.

Na tabela da página seguinte apresenta-se, na forma de resumo, a relação entre diversos conteúdos matemáticos e conceitos musicais, organizados por domínios, constantes do programa e metas curriculares de Matemática do ensino básico e secundário, atualmente em vigor.

Domínio	Conteúdos matemáticos	Conceitos musicais
	2º Ciclo	
NO5	Números racionias não negativos	Figuras musicais
NO6	Números racionais	Escala pitagórica
GM6	Isometrias no plano	Padrões musicais Motivos musicais Recursos composicionais
	3º Ciclo	
NO7	Números racionais	Figuras musicais
GM7	Paralelismo, congruência e semelhança	Escalas musicais
	Medida	Escala temperada
NO8	Dizimas finitas e infinitas periódicas	Escala pitagórica
	Dizimas infinitas não periódicas e números reais	Escala temperada Coma pitagórico
GM8	Vetores, translações e isometrias	Padrões musicais Motivos musicais Recursos composicionais
GM8	Funções	Intervalos
GM9	Trigonometria	Ondas sonoras
ALG9	Proporcionalidade inversa	Frequência e período
	Secundário	
ALG10	Funções	Intervalos musicais
TRI11	Funções trigonométricas	Ondas sonoras
SUC11	Progressões aritméticas e geométricas	Compassos
	Funções exponencial e logaritmica	Escala de intensidades sonoras (em Decíbeis) Intervalos musicais

CC12	Factos elementares do Cálculo Combinatório Triângulo de Pascal e Binómio de Newton	Recursos aleatórios e deterministas

Tabela 1: Conteúdos matemáticos versus conteúdos musicais

Legenda:

NO - Números e Operações; **GM** - Geometria e Medida (GM); **ALG** - Algebra; **TRI** - Trigonometria e Funções Trigonométricas; **SUC** - Sucessões.

Capítulo 1 – Um pouco de matemática

Neste capítulo será realizada uma abordagem a diversos conceitos matemáticos que serão utilizados nos capítulos seguintes.

Para a elaboração deste capítulo foram consultados diversos manuais escolares atualmente em vigor, constantes da bibliografia (Correia & Passos (2016); Costa & Rodrigues (2011, 2012, 2016); Neves, Pereira & Silva (2011); Viegas & Valente (2015)).

1.1. Conjuntos numéricos

Este conteúdo será abordado musicalmente em vários capítulos.

No estudo da matemática podem considerar-se vários conjuntos numéricos. O primeiro conjunto que é ensinado aos alunos é o conjunto dos números naturais, representado por $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots.\}$$

Se, ao conjunto dos números naturais, se acrescentar o zero e os números inteiros negativos, obtém-se um novo conjunto, o conjunto dos números inteiros, que se representa por $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Durante os primeiro e segundo ciclos do ensino básico os alunos travam também conhecimento com o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, embora até ao quinto ano trabalhem apenas com os números racionais positivos.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \{números\ fracionários\}$$

Números fracionários aqueles que são representados por frações de números inteiros, em que o numerador não é múltiplo do denominador.

Em muitas situações é mais conveniente trabalhar com números racionais convertidos em dízimas, ou seja, na sua forma decimal. No conjunto dos números racionais existem dois tipos de dízimas. Observem-se os exemplos dos números racionais $\frac{15}{4}$ e $\frac{7}{3}$.

Efetuando o algoritmo da divisão pode escrever-se:

$\frac{15}{4} = 3{,}75$ e $\frac{7}{3} = 2{,}3333 \ldots. = 2,(3)$

A primeira dízima designa-se por dízima finita, e a segunda por dízima infinita periódica, uma vez que o algarismo 3 se repete infinitamente.

Todos os números racionais da forma $\frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0$ podem ser representados por uma dízima finita ou por uma dízima infinita periódica.

Será que todos os números podem ser representados por dízimas finitas ou dízimas infinitas periódicas? Será que $\sqrt{2}$ é um número racional?

Para responder a estas perguntas, iremos demonstrar, em primeiro lugar, que $\sqrt{2}$ não é um número racional, utilizando o método de demonstração por redução ao absurdo.

Caso $\sqrt{2}$ seja um número racional pode ser escrito na forma $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, sendo n e m dois números naturais, e $\frac{n}{m}$ uma fração irredutível.

Como $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ então

$$n^2 = 2m^2 \tag{1}$$

o que significa que n^2 é um número par e portanto n também é um número par.

Uma vez que n é um número par, existe um número natural k tal que

$$n = 2k \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1) obtém-se

$$(2k)^2 = 2m^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2m^2 \Leftrightarrow m^2 = 2k^2$$

o que permite concluir que m também é um número par.

Se n e m são números pares, então a fração $\frac{n}{m}$ não é uma fração irredutível, o que contraria a hipótese da qual se partiu. Então pode-se concluir que $\sqrt{2}$ não é um número racional, sendo designado de número irracional. Pode agora responder-se à primeira questão colocada, nem todos os números podem ser representados por dízimas finitas ou infinitas periódicas, uma vez que nem todos os números são racionais.

Os números irracionais não se podem representar por dízimas finitas ou infinitas periódicas mas sim por dízimas infinitas não periódicas. Para poder contemplar este tipo de números surgiu um novo conjunto, o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{números\ irracionais\}$$

1.1.1. Segmentos de reta incomensuráveis

Dois segmentos de reta são comensuráveis quando (e apenas quando), tomando um deles para unidade de comprimento, existe um número racional positivo r, tal que a medida do outro é igual a r.

Os segmentos de reta serão todos comensuráveis? No exemplo seguinte pode verificar-se que não, existem segmentos de reta que não são comensuráveis, ou seja, são incomensuráveis, noção esta com que os gregos clássicos se debateram frequentemente.

Considere-se um triângulo retângulo isósceles [ABC], tal que $\overline{AB} = \overline{BC} = b$ e $\overline{AC} = a$, como se pode observar na figura 1.

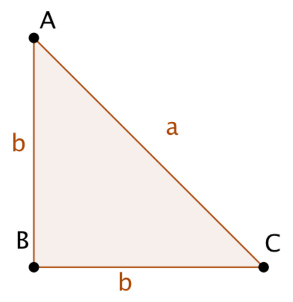


Fig.1: Triângulo retângulo isósceles

Trata-se de um triângulo que se obtém dividindo um quadrado de lado *b* por uma das suas diagonais, de comprimento *a*.

Serão os segmentos de reta [BC] e [AC] comensuráveis?

A área do triângulo [ABC] é dada por $\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{2}=\frac{b^2}{2}$

Sobre a hipotenusa do triângulo pode construir-se um quadrado, de lado a, como se pode observar na figura 2.

A área deste quadrado é dada por a^2 .

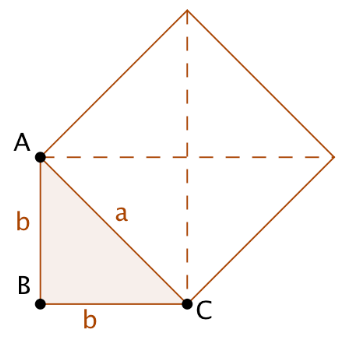


Fig.2: Área do triângulo

O quadrado pode ser decomposto em quatro triângulos, geometricamente iguais ao triângulo [ABC], pelo que se tem

$$a^2=4\times\frac{b^2}{2}\Leftrightarrow a^2=2b^2$$

Uma vez que a e b representam valores positivos pode escrever-se $a = \sqrt{2}b$, ou seja, $\overline{AC} = \sqrt{2}\,\overline{BC}$ o que significa que a hipotenusa e os catetos deste triângulo não representam segmentos de reta comensuráveis.

1.2. Diferentes médias

Este conteúdo será abordado musicalmente no subcapítulo 3.4. “Intervalos e escalas musicais”.

Em matemática podem considerar-se vários tipos de médias, entre elas a média aritmética, a geométrica e a harmónica. A média de um conjunto de números pode ser definida como sendo um valor de tendência central do conjunto.

1.2.1. Média aritmética

A média aritmética simples, conhecida apenas por média, é a medida de posição central mais utilizada. Para determinar a média de um conjunto de números somam-se todos os números e divide-se o resultado pelo número de elementos do conjunto.

Considerem-se os seguintes n números: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

A média aritmética simples deste conjunto é:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Nos cálculos que envolvem a média aritmética simples, todos os elementos têm o mesmo peso relativo. No entanto existem situações em que nem todos os elementos têm a mesma importância, ou seja, o mesmo peso relativo. Nestas situações deverá utilizar-se a média aritmética ponderada. Neste caso, cada elemento deverá ser multiplicado pelo seu peso relativo.

Considerem-se os números: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

cujo peso relativo de cada um é: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

A média aritmética ponderada, $\bar{x}_p$ calcula-se da seguinte forma:

$$\bar{x}_p = \frac{x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \cdots + x_n \times p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n}$$

1.2.2. Média geométrica

A média geométrica, que se utiliza apenas em conjuntos de números positivos, é definida como o produto de todos os elementos do conjunto, elevado ao inverso do seu número de elementos. Esta média, diferente da média aritmética que usa a soma dos elementos, indica a tendência central de um conjunto de números, usando o produto dos seus elementos. A média geométrica pode também ser definida como a n-ésima raiz da multiplicação dos elementos do conjunto, sendo n o número de elementos desse conjunto.

Sejam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ n números.

A média geométrica destes é dada por:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots \times x_n}$$

Um exemplo de aplicação desta média na geometria é o seguinte: sejam a, b e c as medidas de um prisma retangular reto. A medida da aresta (x) de um cubo que tem o mesmo volume do prisma é dada pela média geométrica das medidas do prisma, isto é: $x = \sqrt[3]{a \times b \times c}$.

A média geométrica entre dois valores, também pode ser designada por **média proporcional**.

Observe-se a figura seguinte que ilustra um triângulo inscrito numa semicircunferência.

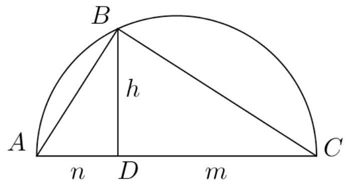


Fig.3: Triângulo inscrito numa semicircunferência

O triângulo retângulo [ABC] pode ser decomposto, pela sua altura, em dois triângulos, também retângulos e semelhantes, [ABD] e [BDC].

Uma vez que estes dois triângulos são semelhantes pode escrever-se a seguinte proporção

$$\frac{n}{h} = \frac{h}{m}$$

que é equivalente a

$$h^2 = m.n$$

Ou seja, h é a média proporcional entre m e n. A média proporcional entre segmentos de reta pode assim ser definida como sendo o valor que ocupa os dois meios (ou os dois extremos) numa proporção envolvendo as medidas dos segmentos de reta, proporção esta na qual os dois meios (ou os dois extremos) são iguais.

Um exemplo de aplicação da média proporcional surge numa das resoluções de um dos três problemas clássicos da matemática grega, o problema da duplicação do cubo. O problema consiste no seguinte:

"Dada a medida da aresta de um cubo, construa, com régua não graduada e compasso, um novo cubo, que tenha o dobro do volume do cubo inicial."

A resolução deste problema, com as condições inicialmente impostas, é impossível. Analise-se a resolução proposta por Hipócrates de Chios (470a.C.-410a.C.).

Considere-se um retângulo de largura b e comprimento c.

Pretende-se construir um quadrado, de lado a, com a mesma área do retângulo.

Para tal é necessário que $a \times a = b \times c$ o que implica que $a = \sqrt{b \times c}$, uma vez que se trata de um comprimento.

O valor do lado determinado é a média geométrica, ou média proporcional, entre b e c.

Considerem-se, agora, as medidas de comprimento dos segmentos de reta a e b. Pretende-se, agora, determinar o comprimento de outros dois segmentos de reta, x e y, tais que: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ onde x e y são duas médias proporcionais entre a e b.

Hipócrates percebeu que se fizesse $b = 2a$ teria a solução do problema.

Substituindo b na igualdade anterior obtém-se $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$

Esta igualdade é equivalente a

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \wedge \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \Leftrightarrow x^2 = ay \wedge y^2 = 2ax$$

$$(x^2)^2 = (ay)^2 \Leftrightarrow x^4 = a^2 y^2$$

Como $y^2 = 2ax$ pode escrever-se

$$x^4 = a^2 \times 2ax$$

o que é equivalente a $x^3 = 2a^3$, ou seja, se x representar a medida da aresta de um cubo, x^3 será a medida do volume do cubo, que é exatamente o dobro do volume do cubo de aresta a, resolvendo, desta forma, o problema grego.

1.2.3. Média harmónica

A média harmónica de um conjunto de n números positivos, define-se como sendo o quociente entre o número de elementos do conjunto e a soma dos inversos dos números considerados.

Considerem-se os seguintes números: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

A média harmónica destes números é dada por:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

O cálculo da média harmónica está relacionado, entre outros exemplos, a grandezas inversamente proporcionais, como o cálculo de velocidades.

1.3. Sucessões, progressões aritméticas e geométricas

Este conteúdo será abordado musicalmente nos subcapítulos 3.2. “Compassos” e 4.4. “O número de ouro e a sequência de Fibonacci para compor”.

O homem estuda fenómenos cíclicos desde a Antiguidade, como refere Mol, R. (2013). Os egipcios, por exemplo, desde cedo sentiram a necessidade de estudar o Rio Nilo e perceber qual o padrão das enchentes para programar as culturas. Observaram que o caudal do rio começava a aumentar logo após se levantar a estrela Sírius, a leste, um pouco antes do nascer do Sol. Verificaram que isto acontecia de 365 em 365 dias, tendo então elaborado um calendário solar dividido em doze meses, de trinta dias cada, e mais cinco dias de festas dedicados aos deuses (Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nepthys). Os egipcios dividiram, ainda, os doze meses em três estações de quatro meses cada uma. A primeira estação marcava o tempo de semear, a segunda o período de crescimento das colheitas e a terceira marcava o tempo da colheita.

Ainda segundo o mesmo autor, diversos problemas relacionados com progressões aritméticas e geométricas, elaborados pelos egipcios, constam de um documento, datado de cerca de 1650 a.C., o papiro de Rhind. Um excerto de uma página deste documento pode ser observado na figura 4.

Fig. 4: Imagem do papiro de Rhind
Fonte: http://www.matematica.br/historia/prhind.html

Este papiro, que se encontra atualmente no Museu Britânico, em Londres, tem, aproximadamente, 550 cm de comprimento por 32 cm de largura, e contém uma série de tabelas, 87 problemas, e respetivas soluções, alguns dos quais relacionados com situações do dia a dia desta civilização, tais como o preço do pão, o armazenamento dos cereais, a alimentação do gado, entre outros.

Um dos problemas constantes deste papiro é o seguinte:

"Divide 100 pães por 5 homens de tal modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que 1/7 da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas partes menores. Qual é a diferença entre as partes?"

Antes de resolver este problema é importante analisar alguns conceitos matemáticos nele implícitos.

Uma sucessão de números reais é uma função que a cada número natural n faz corresponder um número real, u_n.

Uma sucessão pode ser definida de várias formas. Uma dessas formas é através do seu termo geral, como se pode observar no exemplo seguinte.

Seja (u_n) a sucessão que a cada número natural faz corresponder o seu triplo.

$$\begin{aligned} u: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto 3n \end{aligned}$$

Outra forma de definir uma sucessão é por recorrência, isto é, é(são) conhecido(s) o(s) primeiro(s) termo(s) da sucessão e a “lei” para determinar qualquer outro termo, recorrendo aos termos anteriores.

Considere-se a sucessão dos números triângulares, (t_n), em que os primeiros cinco termos são 1, 3, 6, 10, 15, ...

Esta sucessão pode definir-se por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + n\ ;\ n \geq 2 \end{cases}$$

Existem sucessões que têm caraterísticas “especiais”, como é o caso das progressões aritméticas.

Uma sucesão será uma progressão aritmética se e só se existir um número real r (designado por razão) tal que a diferença entre cada termo e o seu anterior seja igual a r, ou seja, $\exists r \in \mathbb{R}: u_{n+1} - u_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$.

Considere-se (u_n) uma progressão aritmética de razão r. A definição de progressão aritmética permite escrever as igualdades seguintes, que conduzem à expressão do termo geral da progressão aritmética (u_n).

$$u_1 = u_1 + 0r$$

$$u_2 = u_1 + r$$

$$u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r$$

$$u_4 = u_3 + r = u_1 + 3r$$

...

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

Para a resolução do problema apresentado no papiro de Rhind, considere-se que a_n representa a quantidade de pão que cada homem recebe.

Como a divisão dos pães vai ser feita em progressão aritmética pode representar-se a quantidade de pão que cada homem vai receber da seguinte forma:

$$a_1$$
$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_1 + 3r$$
$$a_5 = a_1 + 4r$$

Uma vez que o número total de pães a distribuir é 100 tem-se:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5a_1 + 10r = 100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 2r = 20n \qquad (3)$$

Como a soma das duas partes menores é igual à sétima parte da soma das três partes maiores tem-se:

$$a_1 + a_2 = \frac{a_3 + a_4 + a_5}{7} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + r = \frac{3a_1 + 9r}{7} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 11a_1 = 2r \qquad (4)$$

Conjugando as equações (3) e (4) pode escrever-se o seguinte sistema de duas equações:

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 20 \\ 11a_1 = 2r \end{cases}$$

Este sistema é equivalente a $\begin{cases} a_1 = \frac{5}{3} \\ r = \frac{55}{6} \end{cases}$

Ou seja, a divisão dos pães vai ser feita da seguinte forma: o primeiro homem recebe $\frac{5}{3}$ dos pães, o segundo recebe $\frac{65}{6}$, o terceiro $\frac{120}{6}$, o quarto $\frac{175}{6}$ e o quinto, e último homem, recebe $\frac{230}{6}$ dos pães.

Para além das progressões aritméticas, onde é constante a diferença entre um termo e o seu antecedente, existem também sucessões nas quais o quociente entre um termo e o seu antecedente é sempre constante e igual a r. Neste caso a sucessão designa-se por progressão geométrica, isto é, $\exists r \in \mathbb{R}: \frac{u_{n+1}}{u_n}\ r, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para determinar o termo geral de uma progressão geométrica (u_n) de razão r observem-se as seguintes igualdades:

$$u_1$$

$$u_2 = u_1 r$$

$$u_3 = u_2 r = u_1 r^2$$

$$u_4 = u_3 r = u_1 r^3$$

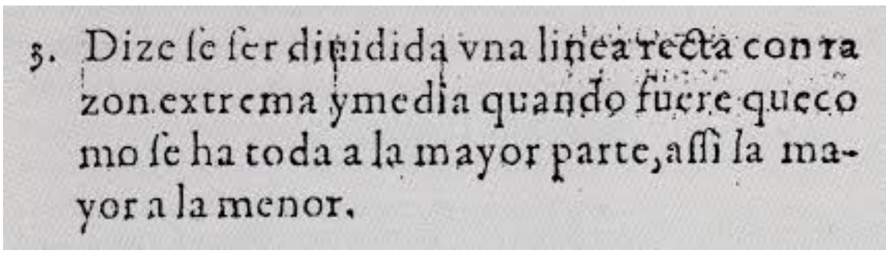
Da observação das igualdades conclui-se que: $u_n = u_1 r^{\mathrm{n}-1}$.

1.4. O número de ouro

Este conteúdo será abordado musicalmente no capítulo 4 “Número de ouro, proporção áurea e música”.

O “número de ouro”, também designado por “divina proporção” ou “proporção áurea” é conhecido desde a Antiguidade, como refere Corbalán, F. (2010). É um número irracional que se representa pela letra grega ϕ (fi). Trata-se de uma descoberta grega e a sua história documentada começa no livro “Elementos de Geometria”, de Euclides, escrito cerca de 300 anos antes do nascimento de Cristo.

Nesta obra pode ler-se o seguinte:



5. Dize ſe ſer diuidida vna linea recta con ra
zon extrema y media quando fuere que co
mo ſe ha toda a la mayor parte, aſſi la ma-
yor a la menor.

Fig. 5: Excerto da tradução castelhana, em 1576, da obra de Euclides

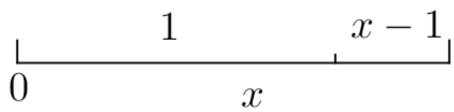
Fonte: Corbalán, F. (2010)

Traduzido para português: “Diz-se que uma reta está dividida em média e extrema razão quando o comprimento da linha total está, para a parte maior, como esta parte maior está para a menor.”

Esta média e extrema razão, é o número que posteriormente ficará conhecido como número de ouro, como refere o mesmo autor. O símbolo com o qual o representamos hoje em dia foi-lhe atribuído numa altura muito posterior, no início do século XX.

Como calcular o valor de ϕ?

Considere-se um segmento de reta (de comprimento x), dividido em duas partes (uma de comprimento 1 e outra de comprimento $x - 1$).



Tal como é dito por Euclides, a partição (divisão) feita no segmento será uma partição áurea quando:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x - 1}$$

A propriedade fundamental das proporções permite escrever a equação do segundo grau:

$$x \times (x - 1) = 1 \times 1$$

que é equivalente a:

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad (5)$$

Resolvendo esta equação obtêm-se duas soluções, sendo a positiva a razão áurea, ou número de ouro:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$$

Uma vez que a solução da equação (5) é uma relação entre os comprimentos dos dois segmentos de reta, esta será a mesma qualquer que seja o comprimento de onde se parta.

1.5. Sequência de Fibonacci

Este conteúdo será abordado musicalmente no subcapítulo 4.3. “O número de ouro e a sequência de Fibonacci para compor”.

Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, ou mais simplesmente como Fibonacci, nasceu em Pisa em 1170, tendo morrido em 1250. Como descreve Corbalán (2010), Fibonacci foi um matemático italiano que escreveu obras de geometria, álgebra e teoria dos números, área em que foi pioneiro. O seu livro mais conhecido é o *Liber abaci* (Livro do ábaco), publicado em 1202. Este livro introduz, na Europa, os numerais hindu-arábicos, aborda a teoria dos números (decomposição em fatores primos, critérios de divisibilidade, etc), para além de analisar vários problemas matemáticos. O problema mais conhecido é o famoso problema dos coelhos, cuja solução está associada à sucessão que hoje se conhece por sucessão de Fibonacci.

O problema enuncia-se do seguinte modo:

“*Quantos casais de coelhos teremos ao fim de um ano, se começarmos com um casal que todos os meses gera outro casal, o qual, por sua vez, começará a procriar aos dois meses de idade?”*

Para resolver este problema Fibonacci construiu uma tabela onde registava o crescimento da família de coelhos. Na última coluna, que indica o número de casais de coelhos existentes no final de cada mês, pode observar-se uma sucessão de números com um comportamento curioso: cada termo obtém-se calculando a soma dos dois termos que o precedem. Este comportamento é fácil de compreender se notarmos que em cada mês o número total de casais é igual à soma do número de casais que já existiam no mês anterior com o número de casais que nascem nesse mês e este último número coincide com o número de casais em condições de dar à luz nesse mês, ou seja todos os casais existentes dois meses antes.

Mês \ Geração	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	Total
1º	1					1
2º	1					1
3º	1	1				2
4º	1	2				3
5º	1	3	1			5
6º	1	4	3			8
7º	1	5	6	1		13
8º	1	6	10	4		21
9º	1	7	15	10	1	34
10º	1	8	21	20	5	55
11º	1	9	28	35	15	89
12º	1	10	36	56	35	144

Tabela 2: Crescimento da família de coelhos

A sucessão do número de casais de coelhos existente, no final de cada mês, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ..., também conhecida como sucessão de Fibonacci, pode ser definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n > 2 \end{cases}$$

Para descobrir que relação existe entre esta sucessão e o número de ouro observe-se a tabela seguinte:

Ordem	Termo	Quociente $\frac{f_n}{f_{n-1}}$
1	1	
2	1	1,0000000
3	2	2,0000000
4	3	1,5000000
5	5	1,6666666
6	8	1,6000000
7	13	1,6250000
8	21	1,6153846
9	34	1,6190476
10	55	1,6176471

Tabela 3: Quociente entre termos sucessivos

A partir do sétimo quociente, ou seja, da razão entre os termos de ordem 8 e 7, da sucessão de Fibonacci, o valor obtido aproxima-se do número de ouro, com erro inferior a uma centésima. O limite do quociente $\frac{f_n}{f_{n-1}}$, quando n tende para infinito, é ϕ, ou seja, o número de ouro. Para demonstrar este resultado, suponha-se que a sucessão $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ tem limite. Seja L esse limite:

$$L = lim\frac{f_{n+1}}{f_n}$$

Como $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ tem-se:

$$L = lim\frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = lim\left(\frac{f_n}{f_n} + \frac{f_{n-1}}{f_n}\right) = lim\left(1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}\right)$$

$$= 1 + lim\frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + lim\frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{L}$$

Ou seja: $L = 1 + \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 - L - 1 = 0$

Resolvendo esta equação do segundo grau obtém-se $L = \emptyset$.

1.6. Funções

Este conteúdo será abordado musicalmente nos segundo e terceiro capítulos, "O som" e "Um pouco de música".

Em várias áreas do conhecimento certas relações entre grandezas podem ser descritas por leis matemáticas, de forma a que, conhecendo os valores de algumas das grandezas, se obtêm os valores que lhes correspondem na outra grandeza. Para compreender melhor tais relações foi necessário o desenvolvimento de um conceito novo, o conceito de função. Como refere Costa e Rodrigues (2016), foram vários os matemáticos e físicos que contribuíram para o desenvolvimento deste conceito, essencialmente a partir do século XVII, destacando-se, neste processo, Leibniz (1646-1716), matemático alemão que utilizou uma linguagem e notações que perduraram ao longo do tempo.

Dados dois conjuntos A e B, define-se uma função f (ou aplicação) de A em B, quando a cada elemento x de A se associa um único elemento de B que se representa por f(x).

Designa-se a função f de A em B por f: A⟶B ou, simplesmente, por f.

O conjunto A é o conjunto dos objetos e designa-se por domínio da função f, D_f, o conjunto B designa-se por conjunto de chegada da função, CC_f. O conjunto de todas as imagens dos elementos do domínio designa-se por contradomínio da função, D'_f.

Observe-se o seguinte exemplo:

A correspondência representada no diagrama da figura 6 é uma função de A em B, pois a cada elemento de A (ou objeto) corresponde um e um só elemento de B (ou imagem).

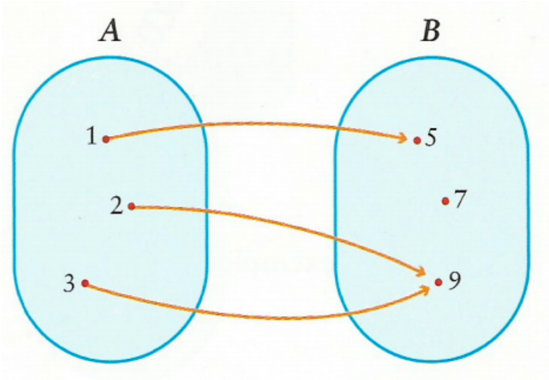


Fig.6: Imagem de uma função

Fonte: Viegas & Valente (2015)

Relativamente a esta função pode dizer-se que:

- o objeto 1 tem imagem 5;
- os objetos 2 e 3 têm imagem 9;
- A é o domínio (conjunto dos objetos);
- B é o conjunto de chegada;
- $\{5, 9\}$ é o contradomínio (conjunto das imagens).

1.6.1. Função injetiva

Dados dois conjuntos A e B, uma função f: A $\longrightarrow$ B é injetiva se para todos os x_1 e x_2 pertencentes a A, $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

A função $f: E \longrightarrow F$, definida pelo diagrama da figura 7 é injetiva, uma vez não existem objetos diferentes com a mesma imagem.

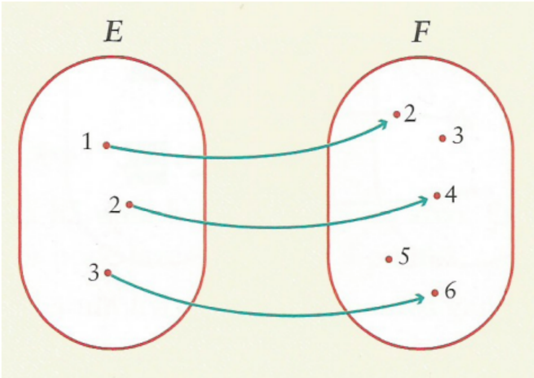


Fig.7: Imagem de uma função injetiva

Fonte: Viegas & Valente (2015)

Considere-se agora a função $g: A \longrightarrow B$, definida pelo diagrama representado na figura 8.

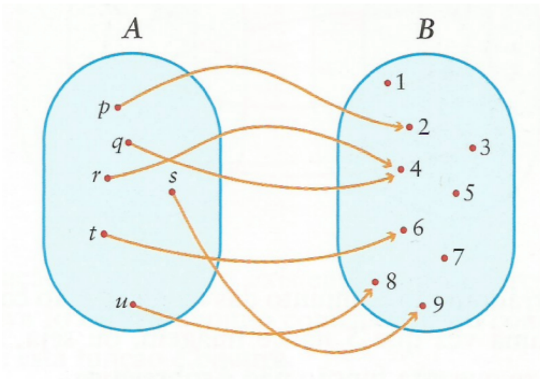


Fig.8: Imagem de uma função não injetiva

Fonte: Viegas & Valente (2015)

Nesta função, há dois objetos com a mesma imagem, $f(q) = f(r) = 4$, portanto trata-se de uma função não injetiva.

1.6.2. Função sobrejetiva

Dados dois conjuntos A e B, uma função $f: A \longrightarrow B$ é sobrejetiva se o contradominio coincidir com o conjunto de chegada, ou seja, se, para todo o y pertencente a B, existir pelo menos um elemento x pertencente a A tal que:

$y = f(x)$.

Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{5,7,9\}$ e seja $f: A \longrightarrow B$ a função definida pelo diagrama:

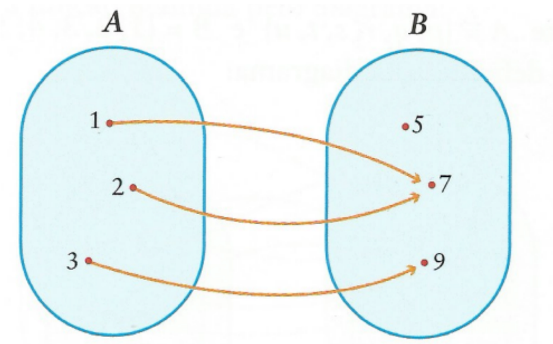


Fig.9: Imagem de uma função não sobrejetiva
Fonte: Viegas & Valente (2015)

Nesta função, o contradomínio não coincide com o conjunto de chegada, uma vez que 5 não é imagem de nenhum objeto.

1.6.3. Função bijetiva

Dados os conjuntos A e B, uma função $f: A \longrightarrow B$ é bijetiva se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

1.6.4. Função composta

Dadas duas funções f e g tais que $f: D_f \longrightarrow$A e $g: D_g \longrightarrow$B , a "função composta de g com f" ou "g após f" representa-se por $g \circ f$ e é tal que:

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ e $\forall x \in D_{g \circ f},\ g \circ f(x) = g(f(x))$

Esta função é descrita no exemplo seguinte.

Sejam $A = \{-2,-1,1,3\}$, $B = \{-4,-2,2,6\}$ e $C = \{4,16,36\}$, a função $f: A \longrightarrow B$, definida por $f(x) = 2x$, e a função $g: B \longrightarrow C$, definida por $g(x) = x^2$.

A aplicação da função f, de A em B, seguida da aplicação da função g, de B em C, pode ser esquematizada como se segue.

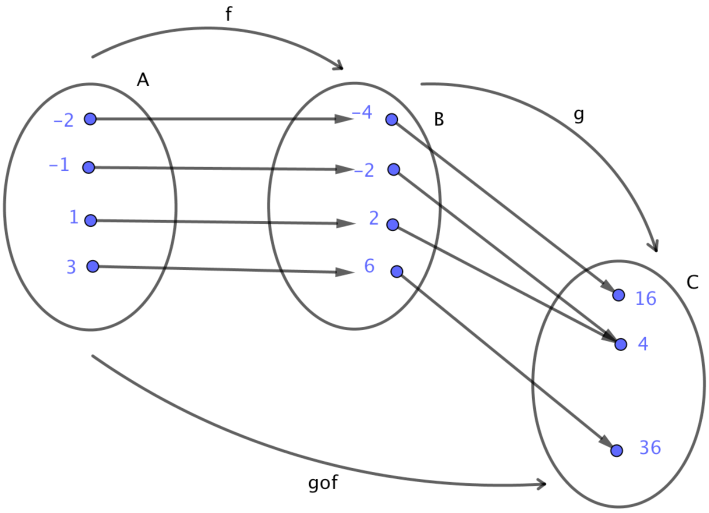


Fig.10: Imagem da função composta

Pode observar-se neste esquema uma nova função, de A em C, a função composta de g com f, que se representa por $g \circ f$. O domínio desta função é o conjunto A e as imagens de cada um dos seus objetos podem ser determinadas como no seguinte exemplo:

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 4$$

1.6.5. Função inversa

Seja f uma função bijetiva de A em B. Qualquer que seja $y \in B$, existe um e um só $x_y \in A$ tal que $f(x_y) = y$. Chama-se função inversa de f e representa-se por f^{-1} à função $f^{-1}: B \longrightarrow A$ tal que: $\forall y \in B, f^{-1}(y) = x_y$.

Simbolicamente tem-se:

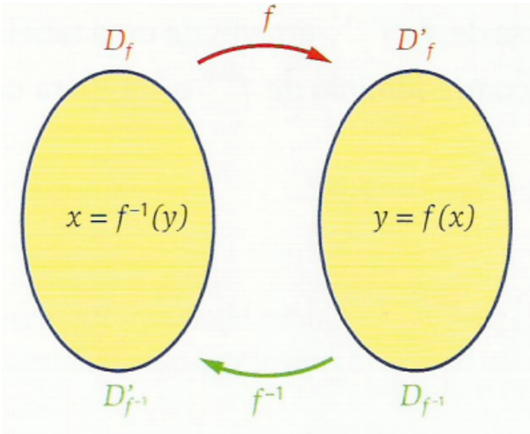


Fig. 11: Imagem da função inversa

Fonte: Andrade, Pereira & Pimenta (2015)

1.7. Funções trigonométricas

Este conteúdo será abordado musicalmente nos subcapítulos 2.3. e 2.4., “Representações gráficas do som” e “Sons puros e sons compostos”.

A palavra trigonometria é de origem grega e resulta da composição de três palavras, tri (três) + gonia (ângulo) + métron (medida), cujo significado é “medida de triângulos”.

Costa e Rodrigues, (2011) referem que a trigonometria surgiu da necessidade de determinar distâncias inacessíveis, tendo a sua principal aplicação na atronomia, na agrimessura e na navegação.

No século V a.C., segundo os mesmos autores, Hipócrates de Chios estudou relações entre arcos de circunferência e as respetivas cordas. Cerca de dois séculos depois, Arquimedes de Siracusa, na sequência do trabalho desenvolvido para calcular o perímetro de um círculo, dado o raio, calculou o comprimento de diversas cordas, tendo estabelecido algumas fórmulas trigonométricas. Hipárco de Niceia, no século II a.C., estudou o posicionamento das estrelas utilizando conceitos trigonométricos, tendo sido o autor das primeiras tábuas trigonométricas.

Ainda segundo os mesmos autores, para o desenvolvimento da trigonometria contribuiu, também, o astronomo grego Ptolomeu, no século II d.C.. Baseado no trabalho de Hipárco, elaborou um catálogo de estrelas e mapas do mundo conhecido à data, e construiu uma tabela de cordas que pode ser considerada equivalente a uma tabela de senos.

Hoje em dia a trigonometria, para além da resolução de problemas envolvendo triângulos, está associada, também, às funções cirulares, goniométricas ou trigonométricas. Na obra Introductio, de 1748, o matemático suíço Euler fez o estudo analitico das funções trigonométricas, funções estas que são de extrema importância para o estudo dos fenomenos periódicos tais como vibrações e movimentos ondulatórios e periódicos.

1.7.1. Ângulo generalizado

Um ângulo é uma região do plano delimitada por duas semiretas com a mesma origem, denominada vértice do ângulo.

As unidades de medida da amplitude de ângulos mais utilizadas são o grau e o radiano. O grau, unidade de medida do sistema sexagésimal, é a medida da amplitude do ângulo correspondente à nonagésima parte de um ângulo reto. O radiano, unidade de medida do Sistema Internacional, é a medida da amplitude do ângulo ao centro que determina, em qualquer circunferência com centro no seu vértice, um arco de comprimento igual ao seu raio.

1 radiano = $\frac{180^{\circ}}{\pi}$ ou $1\,rad \approx 57^{\circ}17'45''$

Um ângulo orientado é um ângulo ao qual se atribui um sentido. Convencionou-se que o sentido negativo é o sentido do movimento dos ponteiros do relógio, enquanto que o movimento contrário ao dos ponteiros do relógio é o sentido positivo.

Fixando um lado origem para um ângulo, por exemplo $\dot{O}A$, e um sentido, é possível obter o ângulo AOB dando uma, duas, três ou mais voltas. Todos estes ângulos têm o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade.

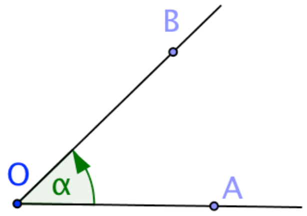


Fig.12: Ângulo orientado AOB

Círculo trigonométrico é o nome pelo qual se designa um círculo com centro na origem do referêncial, cujo raio tem uma unidade de medida.

1.7.2. Razões trigonométricas de um ângulo

Considere-se um círculo com centro na origem de um referencial ortonormado e monométrico xOy, cujo raio tem r unidades de comprimento. Seja P o ponto de interseção da circunferência que limita o círculo com o semi eixo positivo das abcissas, e A um ponto qualquer da circunferência.

O ângulo orientado positivo $(\dot{O}P, \dot{O}A)$ tem amplitude α. Sejam (x, y) as coordenadas do ponto A.

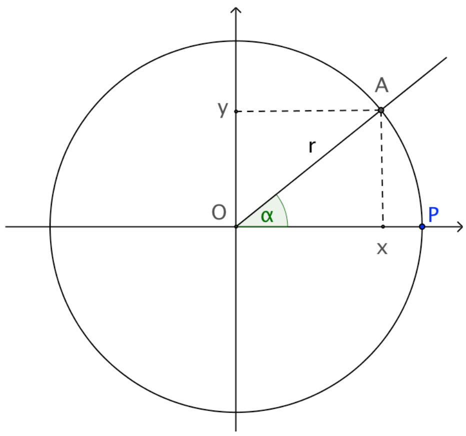


Fig.13: Ângulo orientado numa circunferência

Consoante o lado extremidade $\dot{O}A$ do ângulo se encontre no primeiro, segundo, terceiro ou quarto quadrante, o ângulo α pertencerá ao primeiro, segundo, terceiro ou quarto quadrante.

As razões

$$\frac{ordenada\ de\ A}{\overline{OP}}\ ;\ \frac{abcissa\ de\ A}{\overline{OP}}\ \text{e}\ \frac{ordenada\ de\ A}{abcissa\ de\ A}$$

designam-se razões trigonométricas do ângulo POA, sendo a primeira designada por seno do ângulo, a segunda por cosseno do ângulo e a terceira por tangente do ângulo.

Considerando que o círculo referido acima tem uma unidade de medida de raio (círculo trigonométrico), as razões acima identificadas podem ser escritas na forma

$sen\ \alpha = y$, $\cos\alpha = x$ e $tg\ \alpha = \frac{y}{x}$

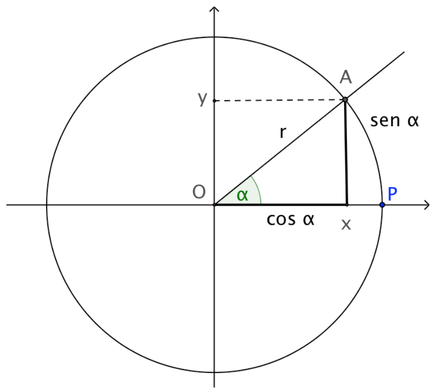


Fig.14: Razões trigonométricas na circunferência

Neste caso, as coordenadas do ponto P são $(cos\ \alpha, sen\ \alpha)$.

O eixo das abcissas designa-se por eixo dos cossenos e o eixo das ordenadas por eixo dos senos.

1.7.3. Funções trigonométricas no círculo trigonométrico

No círculo trigonométrico, a cada ângulo com centro na origem do referencial de amplitude α , em radianos, corresponde um e um só valor de $sen\ \alpha$, $\cos\alpha$ e $tg\ \alpha$.

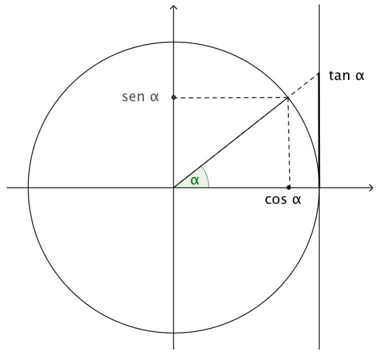


Fig.15: Funções trigonométricas no círculo trigonométrico

Qualquer uma destas três correspondências unívocas tem como domínio e contradomínio subconjuntos de $\mathbb{R}$, podendo então ser encaradas como funções reais de variável real, designadas por funções trigonométricas, círculares ou goniométricas.

Estas funções, como já referido, são utilizadas no estudo de vários fenómenos periódicos, como por exemplo, na vibração de uma corda, fenómeno este que será analisado mais à frente.

1.7.3.1. Função seno

Seja α um ângulo desenhado no círculo trigonométrico, medido em radianos.

Considere-se a função que, a cada amplitude do ângulo α faz corresponder o número real: $sen\ \alpha$.

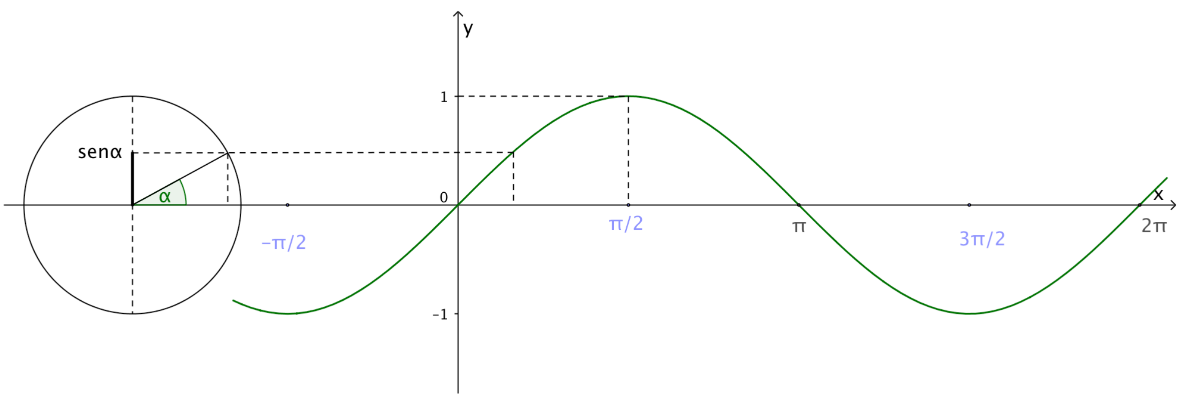


Fig.16: Função seno

A função seno tem as seguintes características:

$D = \mathbb{R}$

$D' = [-1, 1]$

é uma função periódica, com período positivo mínimo 2π, ou seja,

$sen\alpha = sen(\propto +2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

é uma função ímpar: $\forall\alpha \in \mathbb{R}: sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$

1.8. Funções exponenciais e logarítmicas

Este conteúdo será abordado musicalmente nos subcapítulos 2.2. e 3.4., “Principais grandezas associadas a uma forma de onda periódica” e “Intervalos e escalas musicais.

A palavra logaritmo deriva das palavras gregas “logos”, que significa razão, e “arithmos”, que significa número, ou seja, logaritmo é um número que indica uma razão.

O conceito de logaritmo foi introduzido, no início do século XVII, por John Napier (1550-1617), e representou um grande avanço no cálculo aritmético. Os logaritmos permitiram transformar operações mais complexas em operações mais simples, como, por exemplo, transformar multiplicações e divisões em adições e subtrações.

A atual noção de logaritmo deve-se a Leonhard Euler (1707-1738) que o relacionou, durante o século XVIII, com a função exponencial.

1.8.1. Função exponencial

Uma função exponencial de base a é uma função real de variavel real do tipo $y = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Se $a > 1$, trata-se de uma função estritamente crescente.

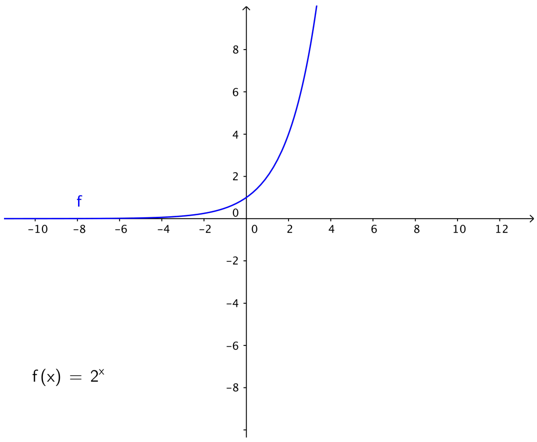


Fig.17: Função exponencial crescente

Se $0 < a < 1$, a função é estritamente decrescente.

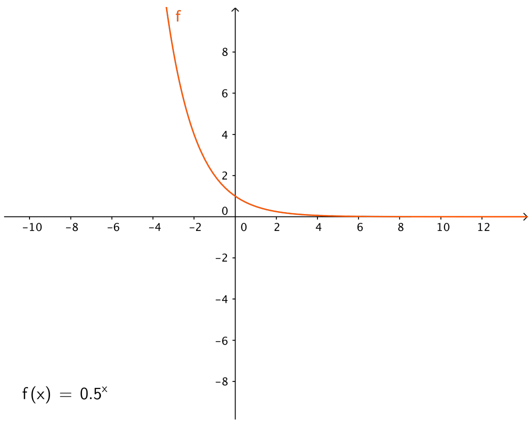


Fig.18: Função exponencial decrescente

Todas as funções exponenciais têm como domínio $\mathbb{R}$ e como contradomínio $\mathbb{R}^+$. Tratam-se de funções injetivas ($\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ se\ x_1 \neq x_2\ então\ f(x_1) \neq f(x_2)$) e positivas. Têm como assintota horizontal a reta de equação $y = 0$.

1.8.2. Função logaritmica

Dada uma função exponencial f , tal que $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, esta admite como inversa (uma vez que se trata de uma função injetiva) uma função do tipo $f^{-1}(x) = log_a x$

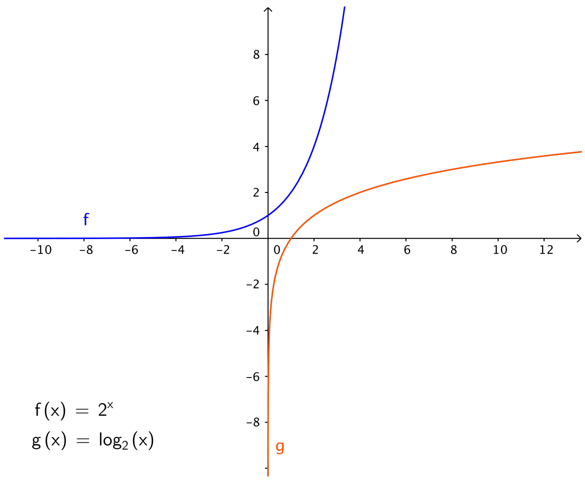


Fig.19: Função exponencial e logarítmica

Uma função deste tipo designa-se por função logaritmica de base a. Tem como domínio $\mathbb{R}^+$ e como contradomínio $\mathbb{R}$.

Se $a > 1$, trata-se de uma função estritamente crescente.

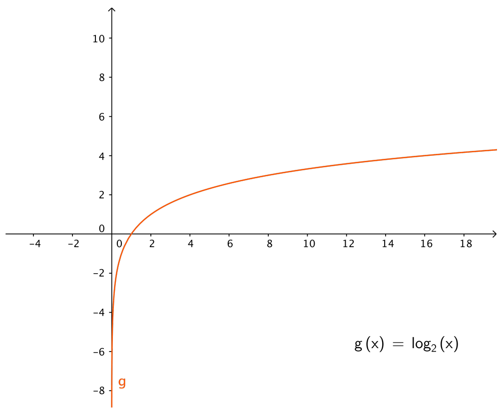


Fig.20: Função logarítmica crescente

Se $0 < a < 1$, a função é estritamente decrescente.

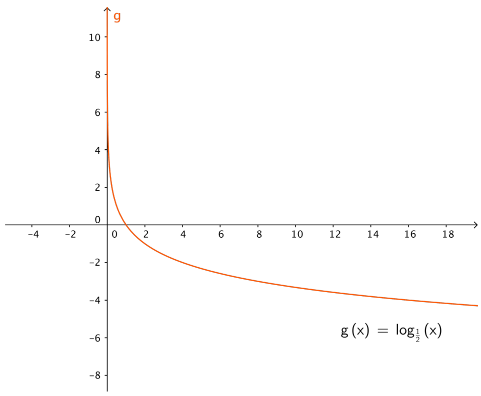


Fig.21: Função logarítmica decrescente

1.8.3. Propriedades das funções logarítmicas

As funções logarítmicas têm algumas propriedades.

Por observação gráfica pode verificar-se que $log_a 1 = 0$.

Considere-se que $x, y \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Podem demonstrar-se as seguintes propriedades:

- $log_a a = 1$
- $log_a(a^x) = x$ e $a^{log_a x} = x$
- $log_a(x \times y) = log_a x + log_a y$
- $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$
- $log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -log_a x$
- $log_a x^k = k log_a x, k \in \mathbb{Q}$
- $log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}; a > 1, b > 1, x > 0$

1.9. Isometrias no plano

Este conteúdo será abordado musicalmente no capítulo 5 “Simetrias e isometrias na música”.

As isometrias têm sido utilizadas pelo homem, nas suas criações, desde a pré-história. Os povos antigos utilizaram as figuras geométricas como elementos decorativos e, com o desenvolvimento das civilizações, os desenhos geométricos foram adquirindo formas cada vez mais complexas.

É possível também observar diversas transformações geométricas presentes na cerâmica, cestaria, e tapeçaria em várias culturas, ao longo da história.

A cultura Árabe, que proibe a representação de pessoas e animais, desenvolveu desenhos geométricos muito elaborados, ricos em simetrias, translações e repetição de motivos. Em Espanha, em Alhambra, cidade conhecida como “La Ciudad Palatina”, é possível observar diversas obras ricas em simetrias.

Fig.22: A janela de Lindaraja, no Palácio dos Leões
Fonte: http://www.fragatasurprise.com

O artista gráfico holandês M. C. Escher (1898-1972), com o seu estilo próprio, criou diversas obras, desde construções impossíveis ao preenchimento regular do plano, utilizando padrões geométricos que se entrecuzam e se transformam, resultando em formas completamente diferentes das iniciais.

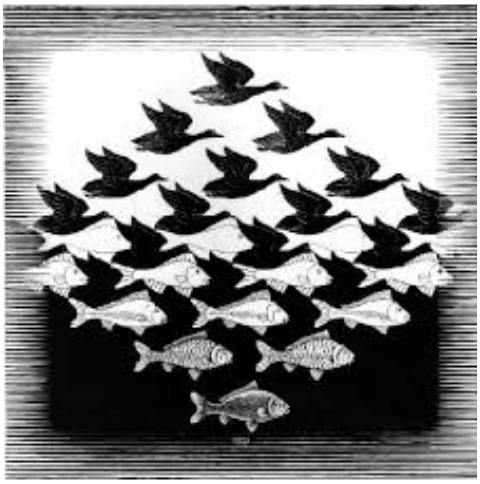


Fig.23: Desenho de Escher
Fonte: http://www.mcescher.com/

Em que consistem as isometrias, que tanto têm fascinado diversos povos? Matematicamente, diz-se que duas figuras são isométricas quando é possível estabelecer, entre os respetivos pontos, uma correspondência um a um, de tal modo que a distância entre quaisquer dois pontos de uma das figuras é igual à distância entre os pontos correspondentes da outra figura.

Uma transformação geométrica, entre duas figuras, com esta propriedade diz-se uma isometria.

Existem quatro tipos diferentes de isometrias no plano:

Reflexão axial;
Rotação;
Translação;
Reflexão deslizante.

Consoante o sentido dos ângulos as isometrias classificam-se de:

Positivas, quando o sentido dos ângulos não é alterado;
Negativas, quando é alterado o sentido dos ângulos.

São exemplos de isometrias positivas as translações e as rotações. Já no caso das reflexões axiais e deslizantes o sentido dos ângulos é invertido, pelo que se tratam de isometrias negativas.

As isometrias têm as seguintes propriedades:

Numa isometria a imagem de uma reta é uma reta.

Numa isometria a imagem de uma semirreta é uma semirreta e a imagem da origem da semirreta é a origem da semirreta imagem.

Numa isometria a imagem de um ângulo é um ângulo.

Uma isometria conserva os comprimentos dos segmentos de reta e as amplitudes dos ângulos.

1.9.1. Reflexão axial

Fig.24: Reflexão axial da imagem de um selo

Uma reflexão axial, ou reflexão de eixo r, é uma transformação geométrica que faz coresponder a cada ponto A o seu simétrico A' tal que:

- se o ponto A pertencer ao eixo r, então A' coincide com A;
- se o ponto A não pertencer ao eixo r, então r é a mediatriz de $[AA']$.

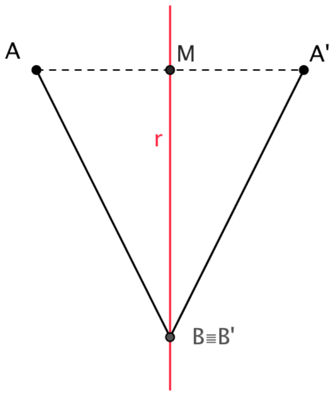


Fig.25: Reflexão axial de eixo r

1.9.2. Rotação

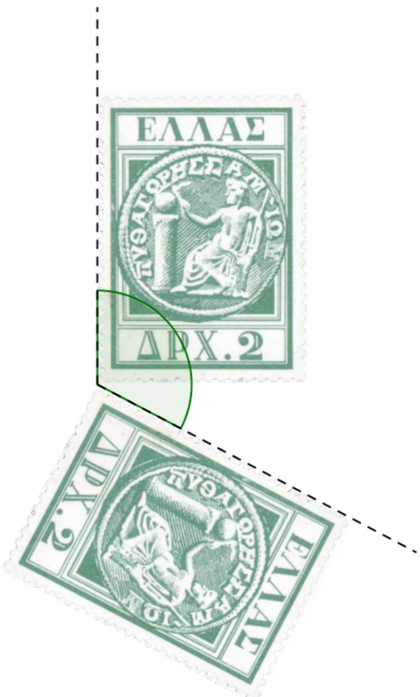


Fig.26: Rotação da imagem de um selo

Uma rotação de centro O e amplitude α é uma tranformação geométrica que a cada ponto A, diferente de O, faz corresponder um ponto A', tal que:

$\overline{OA'} = \overline{OA}$ $\qquad\qquad$ $A'\hat{O}A = \alpha$

A imagem do centro O é o próprio O.

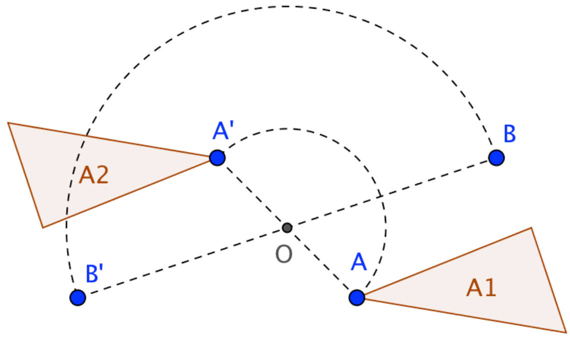


Fig.27: Rotação de centro O

Para que não haja ambiguidade nesta definição é necessário indicar o sentido da rotação, positivo caso seja feita no sentido anti-horário e negativo no caso contrário.

Quando $A'\hat{O}A = 180°$ a rotação designa-se, também, por reflexão central de centro O.

1.9.3. Translação

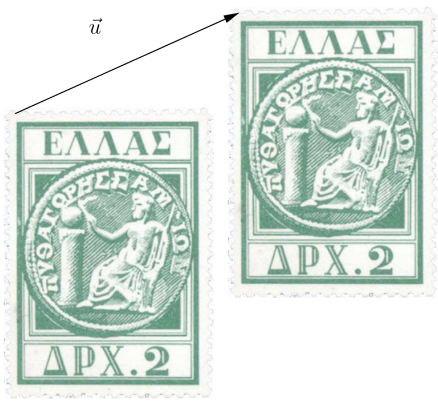


Fig.28: Translação de vetor $\vec{u}$ da imagem de um selo

Uma translação é uma transformação geométrica definida por meio de um vetor, $\vec{u}$, que a um ponto P faz corresponder um ponto Q tal que Q = P + $\vec{u}$.

Qualquer que seja o vetor $\vec{u}$, uma translação conserva o comprimento, a direção e o sentido dos segmentos de reta orientados; a direção e o sentido das semirretas, bem como a amplitude dos ângulos, sendo portanto uma isometria.

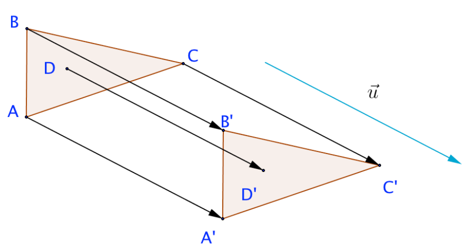


Fig.29: Translação do triângulo [ABC]

1.9.4. Reflexão deslizante

Fig.30: Reflexão deslizante da imagem de um selo

Uma reflexão deslizante é uma transformação geométrica composta por uma reflexão seguida de uma translação (ou vice-versa), em que o vetor da translação tem a mesma direção do eixo de reflexão. A imagem do ponto P é o ponto P''.

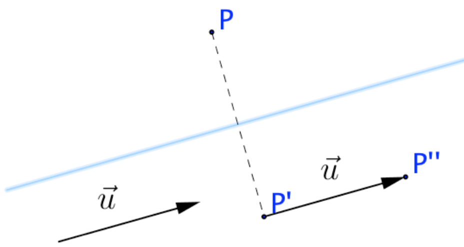


Fig.31: Translação deslizante do ponto P

1.10. Teorema de Tales e Semelhança de triângulos

Este conteúdo será abordado musicalmente no subcapítulo 3.4. “Intervalos e escalas musicais”.

Tales, nasceu em Mileto, na Asia Menor, e terá vivido durante o século VI a.C., sendo considerado, por muitos historiadores, como o primeiro verdadeiro matemático, referem Costa e Rodrigues (2016). Embora não haja registos da época, a tradição atribui-lhe a determinação das alturas das pirâmides do Egito, recorrendo aos comprimentos das sombras.

O Teorema de Tales diz o seguinte:

Os comprimentos dos segmentos de reta determinados em duas retas concorrentes por um par de retas paralelas situadas no mesmo plano são diretamente proporcionais.

De acordo com os elementos da figura, o Teorema de Tales permite escrever as seguintes proporções: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$.

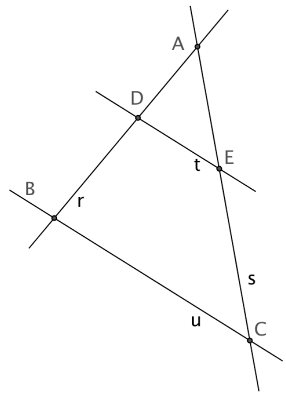


Fig.32: Teorema de Tales

Uma vez que os comprimentos dos lados dos triângulos [ADE] e [ABC] são diretamente proporcionais, pode afirmar-se que os triângulos são semelhantes, dado que se verifica a definição seguinte.

Duas figuras geométricas dizem-se semelhantes quando é possível estabelecer entre os respetivos pontos uma correspondência um a um de tal modo que as distâncias entre pares de pontos correspondentes são diretamente proporcionais. Uma correspondência com esta propriedade designa-se por semelhança e a constante de proporcionalidade por razão de semelhança.

Consoante o valor da razão de semelhança, r, tem-se:

- uma isometria se $|r| = 1$;
- uma ampliação se $|r| > 1$;
- uma redução se $|r| < 1$.

No caso particular dos triângulos, existem três critérios que permitem rapidamente verificar se dois triângulos serão ou não semelhantes, a saber:

- Critério LLL de semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando os comprimentos dos lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos dos lados correspondentes do outro.

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

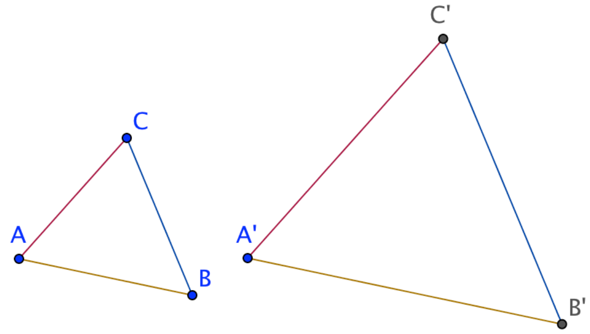


Fig.33: Critério de semelhança de triângulos - LLL

- Critério LAL de semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando os comprimentos de dois lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos de dois lados do outro e os ângulos por eles formados em cada triângulo são iguais.

$$B\hat{A}C = B'\widehat{A'}C'$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$$

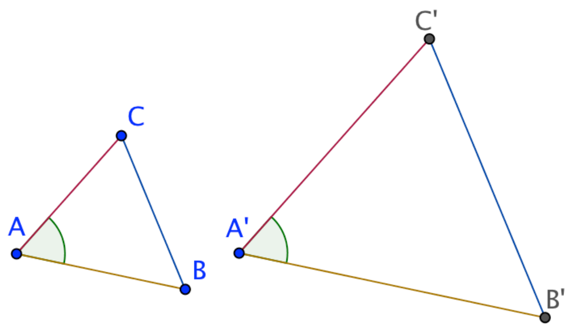


Fig.34: Critério de semelhança de triângulos – LAL

- Critério AA de semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando dois ângulos internos de um são iguais a dois ângulos internos do outro.

$$B\hat{A}C = B'\widehat{A'}C'$$

$$C\hat{B}A = C'\widehat{B'}A'$$

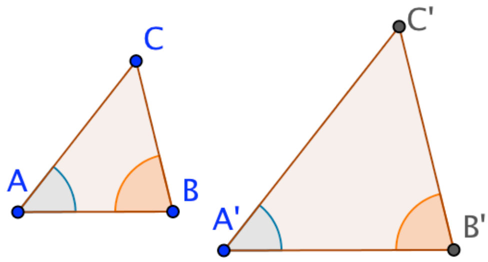


Fig.35: Critério de semelhança de triângulos – AA

1.11. Cálculo combinatório e probabilidades

Este conteúdo será abordado musicalmente no subcapítulo 6.1. “Musikalisches Wurfelspiel”.

A incerteza é a principal razão para o estudo das probabilidades. A incerteza é o que leva as pessoas a jogar os chamados “jogos de azar”. O italiano Girolamo Cardano (1501-1576) escreveu mais de 200 livros dedicados a diversas áreas do saber, destacando-se o *Liber de Ludo Alaea* (Livro dos Jogos de Azar) escrito em1526, primeiro livro completo dedicado às probabilidades.

Dois grandes impulsionadores da teoria das probabilidades associada à Matemática foram Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre Fermat (1601-1665), como referem Costa e Rodrigues (2012). Para além destes matemáticos, também Jacob Bernoulli (1654-1705) e Laplace (1749-1827) contribuíram muito para o desenvolvimento destas matérias.

1.11.1. Experiências aleatórias e acontecimentos

Uma experiência aleatória é uma experiência na qual são conhecidos todos os resultados possíveis. Pode ser repetida várias vezes, sempre em idênticas condições, no entanto nunca é possível determinar à priori o resultado de cada uma das experiências. Por exemplo, a experiência que consiste em lançar um dado equilibrado e verificar qual o número de pintas da face que fica voltada para cima é uma experiência aleatória, pois é impossível saber qual a face que irá ficar voltada para cima.

Ao conjunto de todos os resultados possíveis na realização de uma experiência aleatória chama-se espaço amostral e representa-se por Ω. Cada subconjunto do espaço amostral designa-se por acontecimento.

Considerem-se dois acontecimentos, A e B, associados à realização de uma experiência aleatória, sendo Ω o espaço de resultados.

Se a interseção destes dois acontecimentos for nula, estes acontecimentos designam-se por acontecimentos incompatíveis e, caso contrário, designam-se por compatíveis. Quando dois acontecimentos são incompatíveis e a sua reunião perfaz o espaço amostral os acontecimentos designam-se de acontecimentos contrários.

1.11.2. Definição clássica de probabilidade ou de Laplace

Considere-se uma experiência aleatória em que o espaço amostral Ω é constituído por n elementos, $n \in \mathbb{N}$, sendo equiprováveis (com igual possibilidade de ocorrer) cada um dos n acontecimentos elementares (acontecimentos constituídos por apenas um elemento do espaço amostral).

A lei de Laplace diz-nos que se um acontecimento A é constituído por m acontecimentos elementares, com $m \leq n$, a probabilidade de A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis à ocorrência de A, m, e o número total de casos possíveis: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Segundo Costa e Rodrigues (2012) a lei de Laplace é considerada a primeira definição de probabilidade de que há conhecimento, daí ser conhecida também por definição clássica.

Considere-se o seguinte exemplo:

Num saco foram introduzidas 15 bolas numeradas, com números inteiros consecutivos, sendo 20 o menor.

Ao retirar uma bola ao acaso do saco, qual é a probabilidade de essa bola ter um número ímpar?

Nesta experiência, o espaço de resultados é o conjunto

$$\Omega = \{20, 21, 22, 23, 24, \dots\dots, 34\}$$

Qualquer uma das bolas numeradas tem igual possibilidade de sair.

Considere-se o acontecimento A: ”Retirar uma bola com um número ímpar”.

Existem 7 números do espaço amostral que têm número ímpar

(21, 23, 25, 27, 29, 31, 33), pelo que o número de casos favoráveis à realização do acontecimento A é 7. O número total de elementos do espaço amostral é 15 ou seja, o número de casos possíveis desta experiência é 15.

Então $P(A) = \frac{7}{15}$.

Regra do produto: Quando é necessário realizar k escolhas sucessivas e independentes, em que na primeira há n_1 possibilidades, na segunda há n_2 possibilidades, ..., e na escolha de ordem k há n_k possibilidades, o número de possibilidades total é dado por $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$.

1.11.3. Definição axiomática de probabilidade (caso finito)

Designa-se de probabilidade toda a aplicação P de domínio Ω (com $\#\,\Omega \in \mathbb{N}$) e conjunto de chegada $\mathbb{R}$ tal que, a cada acontecimento A é associado um número real P(A), que se designa de probabilidade do acontecimento A.

$$P: S \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto P(A)$$

Nesta aplicação verificam-se os seguintes axiomas:

1. A probabilidade do acontecimento certo é 1.
2. A probabilidade de qualquer acontecimento A é um número real não negativo.
3. Se A e B forem dois acontecimentos incompatíveis, a probabilidade do acontecimento $A \cup B$ é igual à soma das probabilidades de A e B.

1.11.4. Probabilidade condicionada e independência

Considerem-se A e B dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória, sendo $P(B) \neq 0$.

Quando a probabilidade de ocorrer A está condicionada à ocorrência de B, pode ser necessário calcular uma probabilidade condicionada. A probabilidade de A ocorrer, sabendo que B já ocorreu, designa-se de probabilidade condicionada e representa-se por $P(A|B)$.

O seu cálculo é o seguinte: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

No caso em que a ocorrência de um acontecimento não depende da ocorrência de outro diz-se que os acontecimentos são independentes. Sejam A_1, A_2, ..., A_n, n acontecimentos independentes. Neste caso tem-se:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n)$$

1.11.5. Análise combinatória

Dado um conjunto de n elementos, chama-se **arranjos completos** (ou com repetição) de n elementos p a p a todas as diferentes sequências que se podem formar com os p elementos, repetidos ou não.

O número de arranjos com repetição de n elementos, tomados p a p representa-se por ${}^nA'_p$ e calcula-se ${}^nA'_p=n^p$.

O produto dos n primeiros número naturais designa-se por **fatorial de $\boldsymbol{n}$** e escreve-se $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times \ldots\times 2\times 1$.

Dado um conjunto com n elementos, as diferentes sequências dos n elemenntos que se podem formar designam-se por **permutações de $\boldsymbol{n}$**.

O número de permutações de n é representado por P_n e calcula-se da seguinte forma: $P_n = n!$

Dado um conjunto com n elementos, o número de sequências diferentes que se podem formar com p dos n elementos ($p \leq n$), sem repetir elementos, designam-se por **arranjos sem repetição** de n elementos tomados p a p. Este número representa-se por ${}^nA_p$ e calcula-se da seguinte forma: ${}^nA_p=\frac{n!}{(n-p)!}$

No caso do cálculo do número de subconjuntos de p elementos, tomados de um conjunto com n elementos (onde não interessa a ordem dos elementos de cada subconjunto) está-se perante **combinações** de n elementos tomados p a p, representando-se por ${}^nC_p$.

${}^nC_p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$

1.11.6. Triângulo de Pascal

Os valores das combinações podem encontrar-se num triângulo numérico especial, designado por triângulo de Pascal. Neste triângulo todas as linhas começam pelo número 1, e a soma de dois elementos consecutivos de uma linha é igual ao número que se situa entre eles na linha seguinte.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

${}^{0}C_0$
${}^{1}C_0$ ${}^{1}C_1$
${}^{2}C_0$ ${}^{2}C_1$ ${}^{2}C_2$
${}^{3}C_0$ ${}^{3}C_1$ ${}^{3}C_2$ ${}^{3}C_3$
${}^{4}C_0$ ${}^{4}C_1$ ${}^{4}C_2$ ${}^{4}C_3$ ${}^{4}C_4$
${}^{5}C_0$ ${}^{5}C_1$ ${}^{5}C_2$ ${}^{5}C_3$ ${}^{5}C_4$ ${}^{5}C_5$
${}^{6}C_0$ ${}^{6}C_1$ ${}^{6}C_2$ ${}^{6}C_3$ ${}^{6}C_4$ ${}^{6}C_5$ ${}^{6}C_6$

Fig.36: Imagens do triângulo de Pascal

A soma dos números das diagonais do triângulo de Pascal é sempre um número de Fibonacci.

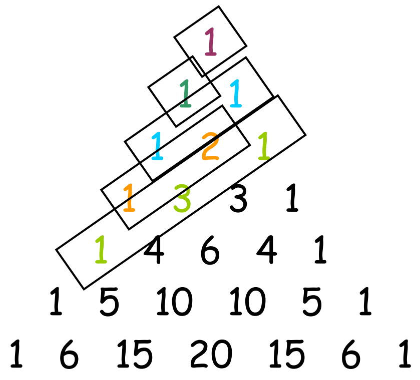


Fig.37: Números de Fibonacci no triângulo de Pascal

Os números de Fibonacci, no triângulo de Pascal, podem escrever-se da seguinte forma:

1º número: C_0^0

2º número: C_0^1

3º número: $C_0^2 + C_1^1$

4º número: $C_0^3 + C_1^2$

5º número: $C_0^4 + C_1^3 + C_2^2$

6º número: $C_0^5 + C_1^4 + C_2^3$

...

nº número: $\sum_{p=1}^{n} C_{p-1}^{n-p}$, considerando que $C_p^n = 0$ caso $p > n$.

Capítulo 2 - O som

A música pode ser definida como sendo uma sequência de sons e silêncios. Importa, portanto, analisar alguns conceitos físicos do som, para melhor compreender a música.

2.1. Definição física de som

Um som é gerado pelo movimento oscilante de matéria física, seja ela um corpo sólido, um líquido ou um gás.

Uma vez emitida, essa vibração propaga-se para as partículas vizinhas, e em última instância ao ar, podendo assim chegar ao ouvido humano.

O efeito da propagação das ondas sonoras manifesta-se sob a forma de compressões e expansões impostas às partículas dos vários meios físicos por elas atravessados, que se propagam para dentro do ouvido, a partir do tímpano, e são convertidas em sinais nervosos que o cérebro interpreta como som.

Para produzir o som de uma corda de uma guitarra é necessário pressioná-la para que esta saia da sua posição de equilíbrio e realize movimentos vibratórios, num certo intervalo de tempo.

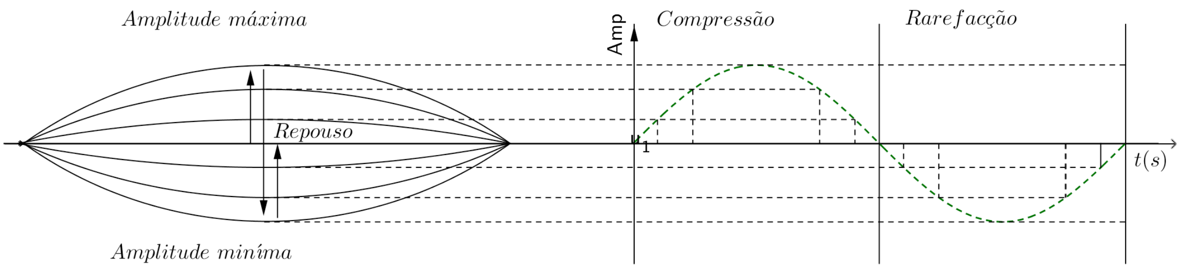


Fig.36: Movimentos vibratórios de uma corda

Ao pressionar a corda é transmitido um impulso inicial que desencadeia um movimento oscilatório, movimento esse que provoca a deslocação entre as posições, designadas na figura anterior, como Amplitude máxima e Amplitude mínima, passando pela posição de repouso, várias vezes por segundo. A variação da pressão atmosférica consiste numa compressão e rarefação consecutiva das moléculas de ar localizadas nas zonas perturbadas pelo movimento da corda, sendo estas perturbações propagadas ao longo do espaço em todas as direções. Na prática, o movimento oscilatório da corda repete-se durante um determinado período de tempo, acabando por se amortecer progressivamente devido ao atrito.

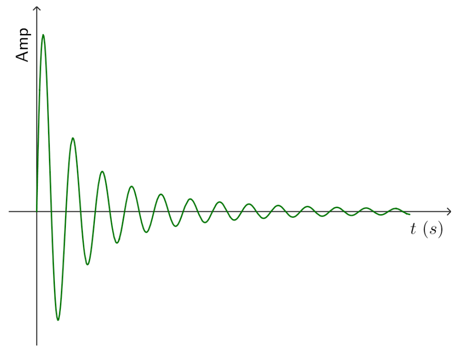


Fig.37: Movimento oscilatório amortecido

Matematicamente uma oscilação sonora periódica (que se repete ao longo do tempo com um padrão constante) correspondente a um som puro e representa-se através da função seno (ou cosseno), representada na figura 38.

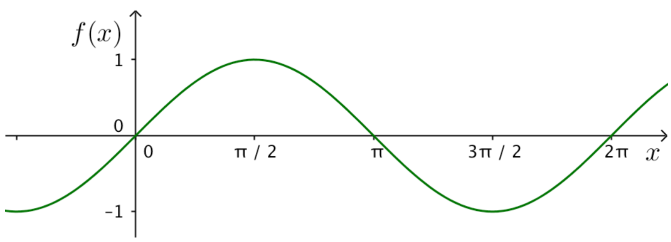


Fig.38: Gráfico da função seno

2.2. Principais grandezas associadas a uma forma de onda periódica

A uma forma de onda com um comportamento oscilatório periódico, tal como a sinusoide, é possível associar algumas grandezas básicas, que estão diretamente relacionadas com características do som.

2.2.1. Frequência

A frequência indica o número de ciclos em cada unidade de tempo.

A unidade de medida de frequência do sistema internacional (S.I.) é o hertz (Hz), que corresponde ao número de ciclos por segundo.

O ouvido humano (de uma pessoa considerada com audição normal), consegue captar frequências de ondas sonoras com valores entre, aproximadamente, 20 Hz e 20000 Hz. As frequências inferiores a 20 Hz denominam-se de infrassons e as frequências superiores a 20000 Hz de ultrassons.

A imagem seguinte ilustra as relações entre as frequências e o ouvido humano.

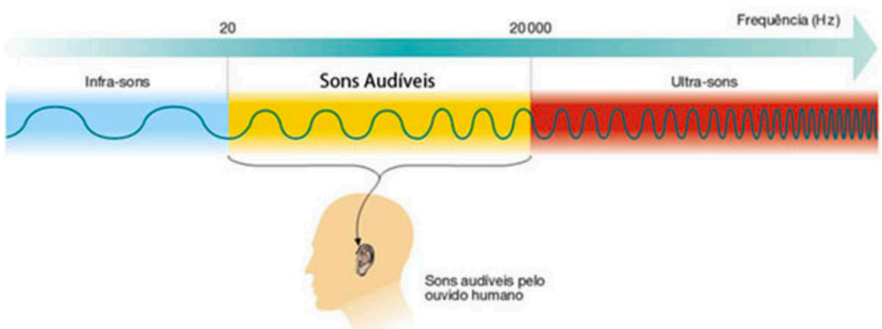


Fig.39: Espectro sonoro

Fonte: http://www.aulas-fisica-quimica.com/8f_07.html

2.2.2. Período

O período, p, é o intervalo de tempo que demora para que cada ciclo se repita. É expresso em segundos (S.I.). A frequência, f, relaciona-se com o período da forma $f = \frac{1}{p}$, ou seja, a frequência e o período são grandezas inversamente proporcionais. Esta relação pode observar-se na figura seguinte.

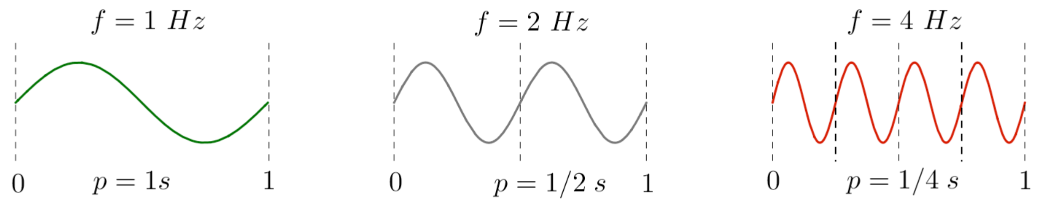


Fig.40: Relação entre frequência e período

2.2.3. Comprimento de onda

O comprimento de onda é expresso em metros (S.I.) e representa a distância entre dois momentos idênticos e consecutivos de uma onda ao propagar-se no espaço. O comprimento de onda, c, está diretamente relacionado com a frequência, uma vez que a velocidade, v, de propagação da onda é dada por $v = c \times f$.

A frequência (ou o período) de uma onda é uma característica intrínseca que não muda quando a onda muda de meio. No entanto, como a velocidade de propagação depende do meio em que a onda se propaga, o comprimento de onda muda quando a onda muda de meio. O comprimento de onda aumenta quando se passa do estado gasoso para o estado líquido e também do estado líquido para o estado sólido, como se pode observar na tabela seguinte.

Meio	Velocidade (m/s)
Gases	
Dióxido de carbono	258
Ar seco (1 atm, 0ºC)	331
Hélio	972
Líquidos	
Água (8ºC)	1493
Mercúrio	1450
Glicerol	1904
Sólidos	
Borracha	1600
Ferro	5950
Alumínio	6420

Tabela 4: Velocidade de propagação de onda em vários meios

Fonte: http://sinfoniadofogo.zip.net/arch2009-04-12_2009-04-18.html

2.2.4. Fase

A fase de uma onda resulta da associação de um ciclo da onda com uma volta na circunferência, sendo expressa em graus, ou em radianos. Graficamente, a amplitude de uma onda pode ser representada em função da fase da seguinte forma:

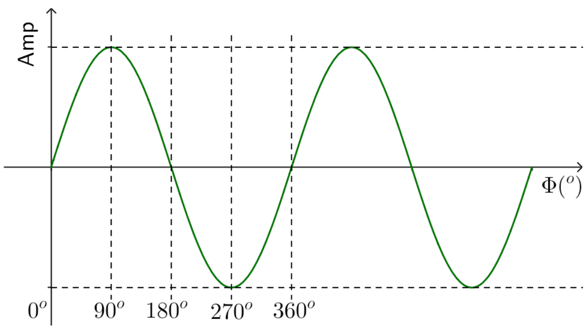


Fig.41: Fase de uma onda

2.2.5. Altura

A altura de um som é dada pela frequência de oscilação da onda. É a característica do som que permite distinguir os sons agudos dos sons graves. Os sons graves têm frequências de oscilação menores do que os sons agudos.

2.2.6. Amplitude

A amplitude é uma característica de qualquer onda e consiste na extensão da perturbação (afastamento máximo desde a posição de equilíbrio) durante um ciclo da onda.

2.2.7. Intensidade

A intensidade é a característica que permite distinguir um som fraco de um som forte. A classificação de um som como forte ou fraco está relacionada com o nível de intensidade sonora, sendo medido em Watt/m^2. Este nível é tanto maior quanto maior for a amplitude da onda de som.

A intensidade sonora possui uma grande variação de valores, desde valores muito pequenos, que correspondem a sons pouco audíveis ($I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 - limiar da audição), a valores muito grandes, que correspondem a sons insuportáveis para o ouvido humano ($I_{máx} = 1$ w/m^2 – limiar da dor), o que faz com que a sua utilização direta seja pouco prática. A utilização de escalas logarítmicas facilita a manipulação dos diferentes valores de intensidade sonora. A utilização destas escalas prende-se, também, com o facto de o ouvido humano responder às perturbações acústicas, não de forma linear, mas sim de forma logarítmica.

A relação entre intensidades sonoras permite calcular o nível de intensidade sonora de um som, nível este expresso em decibéis (dB), através da seguinte relação:

$$NIS = 10log\frac{I}{I_0}$$

sendo $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

A escala do nível de intensidade sonora começa com 0 dB, o limiar da audição, e chega até aos 120 ou 140 dB, onde se situa o limite da dor. Na imagem seguinte podem observar-se vários valores de intensidade sonora, relacionados com atividades do dia a dia.

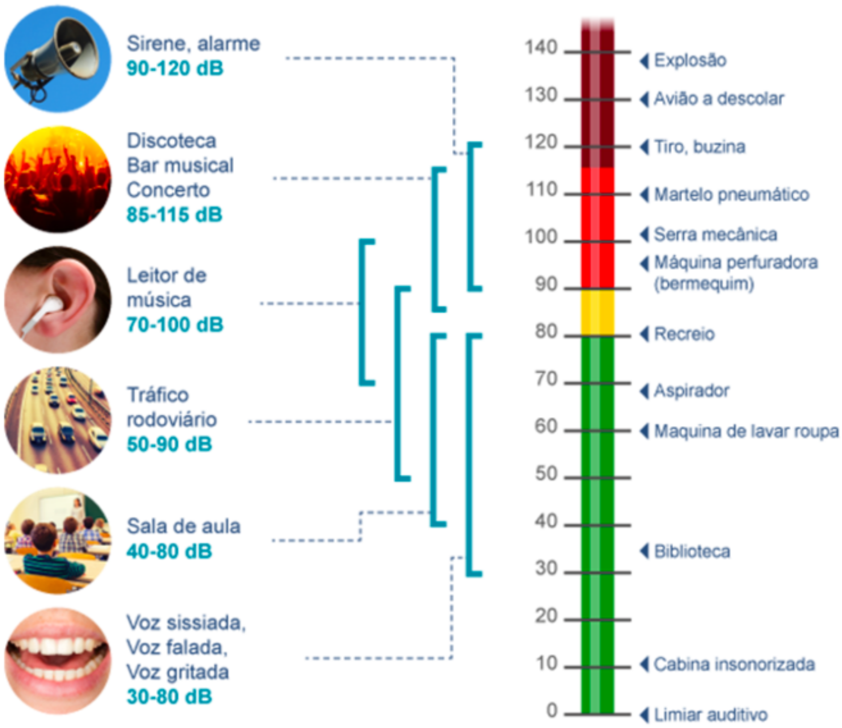


Fig.42: Níveis de intensidade sonora
Fonte: http://www.cochlea.org/po/ruido

2.3. Representações gráficas do som

Como visto acima, um som puro representa-se através de um gráfico sinusoidal. No entanto os sons puros são muito pouco frequentes no mundo real, embora possam ser gerados por processos eletrónicos. Um exemplo de som praticamente puro é o do som obtido por um diapasão.

Fig.43: Diapasão

Fonte: www.3bscientific.es

O som de uma corda de guitarra é composto por um conjunto de sons puros, (harmónicos) hierarquizados pelas respetivas amplitudes. Os harmónicos têm frequências múltiplas duma frequência base (associada ao movimento oscilatório principal) que é designada por frequência fundamental. O harmónico correspondente à frequência fundamental é o mais influente na característica do som, uma vez que é o que tem maior amplitude. Os restantes harmónicos, associados aos movimentos oscilatórios secundários (cuja frequência é um múltiplo inteiro da frequência fundamental), têm tendência a possuír menores amplitudes, diminuindo à medida que as suas frequências se distanciam da frequência fundamental.

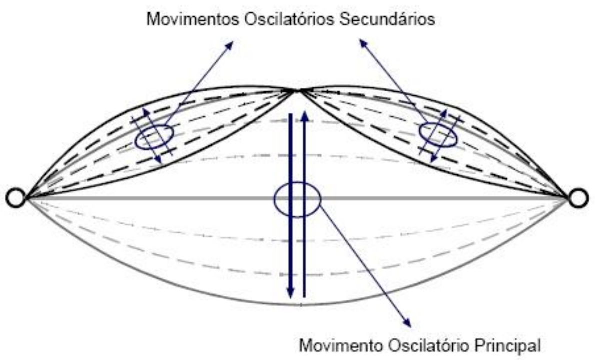


Fig.44: Movimentos oscilatórios manifestados na vibração de uma corda.

Fonte: Tavares, L. (2002)

Embora instrumentos diferentes toquem uma mesma nota, o nosso ouvido consegue identificar de que instrumento provém o som, uma vez que o conteúdo harmónico desse som é diferente de instrumento para instrumento, ou seja, porque cada instrumento tem um timbre próprio. Em termos de onda sonora estas diferenças traduzem-se na forma da onda resultante, que embora periódica, não é uma sinusoide simples mas sim uma soma de múltiplas sinusoides (harmónicos).

Ao timbre é conveniente associar uma forma de representação gráfica diferente, que se designa por espectro ou domínio espectral. O espectro de um som consiste na representação da amplitude (pico de amplitude), para cada frequência (harmónico) que faz parte da composição do som, num instante de tempo. Este tipo de representação permite compreender melhor o timbre de um som, uma vez que ilustra as propriedades dos harmónicos que intervêm na sua composição.

O espectro é uma espécie de fotografia do som. O espectro dos sons puros consiste apenas numa barra vertical, de altura proporcional à sua amplitude de pressão, uma vez que se trata de sons constituídos apenas por uma frequência. A imagem seguinte é uma representação espectral de um som puro de frequência 440 Hz.

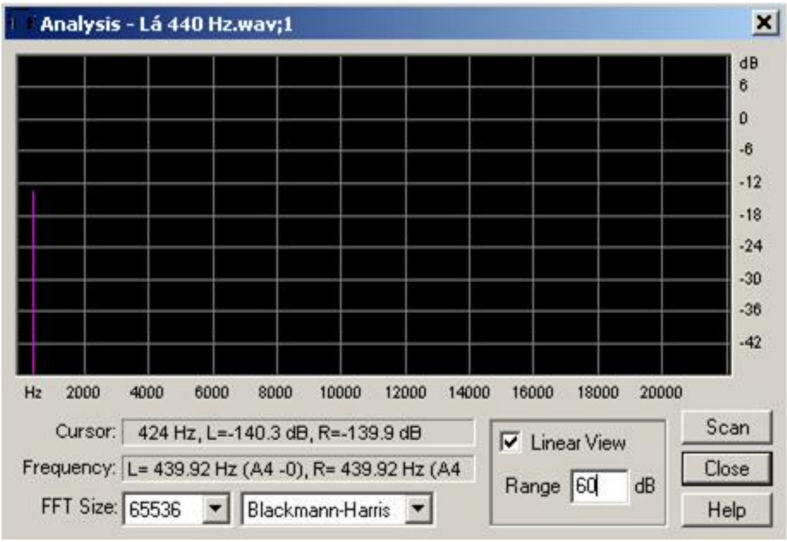


Fig.45: Espectro de uma onda sinusoidal

Fonte: www.musicaeadoracao.com.br

As representações gráficas do som baseiam-se, geralmente, no domínio temporal e espectral, sendo também possível representar simultaneamente os dois domínios, onde se representam vários espectros, ao longo do tempo, como se pode observar na figura seguinte.

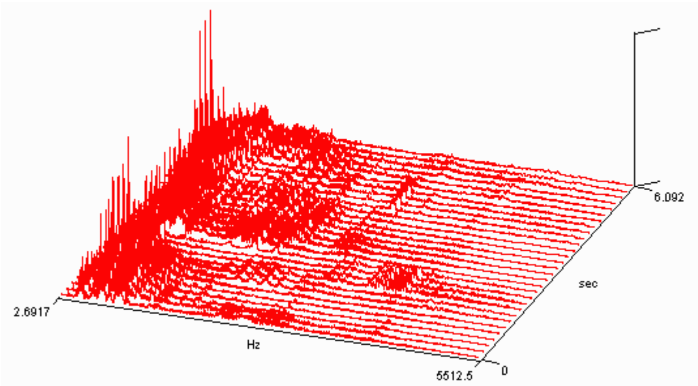


Fig.46: Representação simultânea do domínio temporal e do espectro de um som
Fonte: www.musicaeadoracao.com.br

As figuras seguintes ilustram a representação temporal e espectral do mesmo som, resultante da corda de uma guitarra.

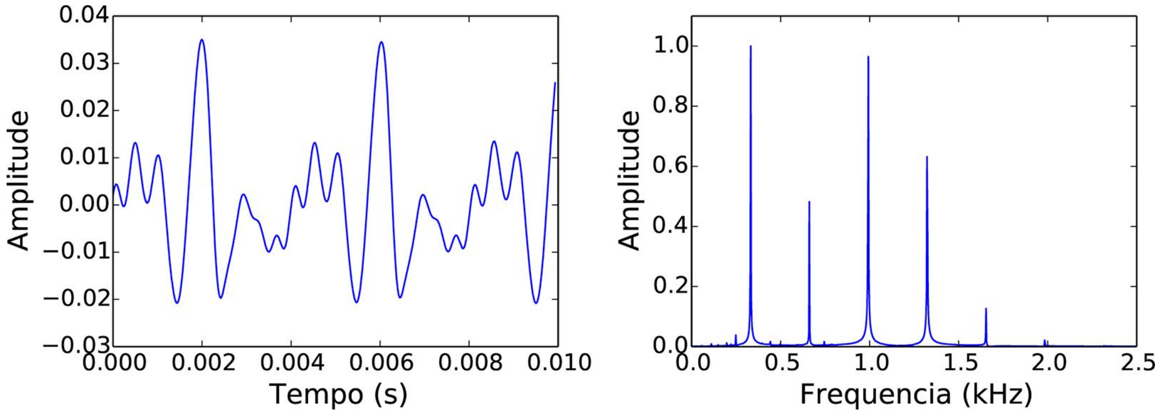


Fig.47: Representação temporal (gráfico da esquerda) e espectral (gráfico da direita) de um som de guitarra
Fonte: www.musicaeadoracao.com.br

2.4. Sons puros e sons compostos

O matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourrier (1766-1830) demonstrou, em meados do séc XVII, que qualquer onda periódica não sinusoidal pode ser decomposta numa série de ondas sinusoidais, de diferentes frequências, e com determinadas amplitudes e fases, como refere Netto, L. (2017). Fourrier demonstrou que, se a forma da onda se repete periodicamente, então as frequências das componentes senoidais são restritas a valores múltiplos da frequência de repetição da forma da onda.

A transformada de Fourrier representa a soma de uma série de formas de onda senoidais com diferentes amplitudes e frequências. Na figura seguinte observam-se três situações (a representação temporal e respetiva representação espectral, em cada caso) referentes ao mesmo som, que representam o som fundamental e alguns dos seus harmónicos de ordem ímpar, que permitem obter uma onda aproximadamente quadrada.

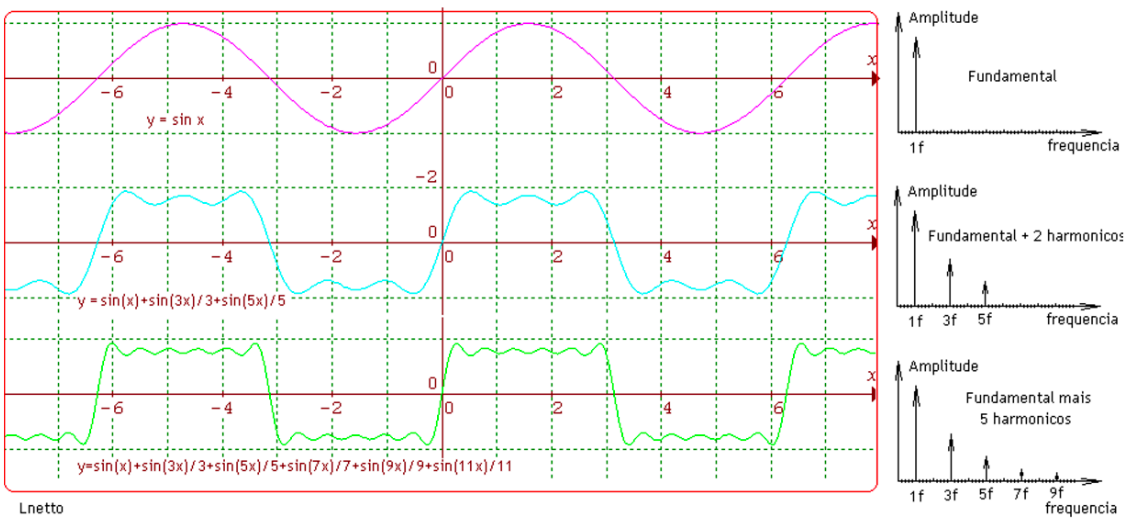


Fig.48: Som fundamental e harmónicos

Fonte: https://musicaeadoracao.com.br/25374/caracteristicas-do-som-a-transformada-de-fourier/

É este processo de decomposição de um som periódico nos seus sons puros, representados por sinusoides, que permite transformar a representação temporal do som no seu espectro.

De seguida exemplifica-se este processo com o caso particular do som da onda Dente de Serra.

Seja $y = \mathrm{A}\sin(2\pi f t)$ a expressão do movimento harmónico simples, onde A representa a amplitude, f a frequência e t o tempo.

A expressão matemática da forma da onda Dente de Serra obtém-se a partir da frequência fundamental f, à qual se sobrepõem os harmónicos de frequências $2f$, $3f$ e $4f$, respetivamente, com amplitudes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.

$$y = \sin(2.\pi.440x) + \frac{\sin(2.\pi.880x)}{2} + \frac{\sin(2.\pi.1320x)}{3} + \frac{\sin(2.\pi.1760x)}{4} + \cdots$$

cujo gráfico é:

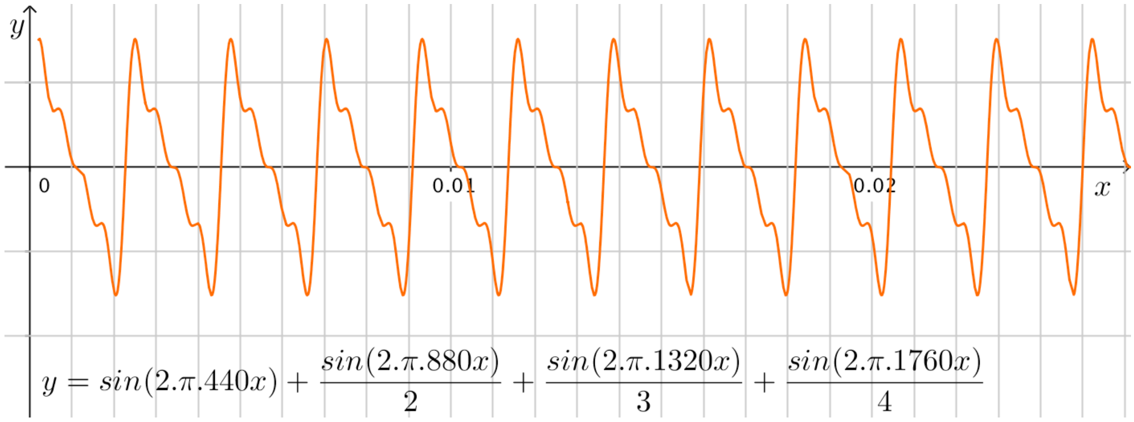


Fig.49: Gráfico da função Dente de Serra

A figura seguinte ilustra o espectro de frequências da onda Dente de Serra.

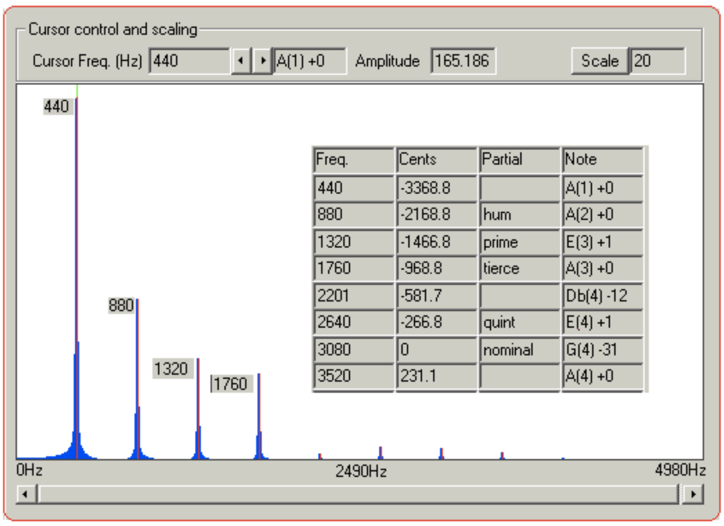


Fig.50: Espectro de frequências da onda Dente de Serra

Fonte: www.musicaeadoracao.com.br

Componentes senoidais da onda Dente de Serra

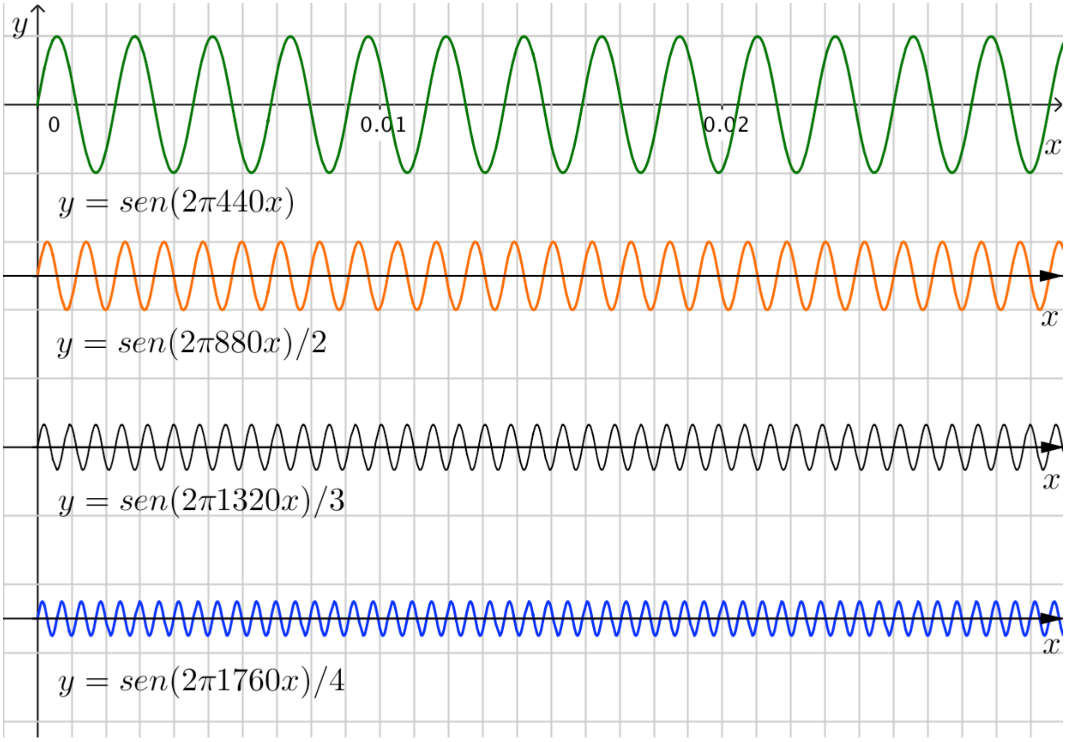


Fig.51: Componentes da onda

A soma vetorial destas ondas, cada uma com um valor de frequência e de amplitude dá origem à onda Dente de Serra apresentada no primeiro gráfico. Quanto maior for o número de componentes, mais perfeita (triangular) ficará a onda.

2.5. Atividades práticas

Neste capítulo estão incluídas cinco atividades, a saber:

1 - Propriedades das ondas sonoras;

2 - Frequência, período e comprimento de onda;

3 - Grandezas associadas a uma forma de onda periódica;

4 - Altura do som versus comprimento de uma coluna de ar;

5 - Sons puros e sons compostos;

6 – Intensidade sonora e logaritmos.

As primeiras quatro atividades podem ser aplicadas em qualquer ano do terceiro ciclo de escolaridade, mas preferencialmente no oitavo ano, uma vez que abordam conceitos que são, neste ano, trabalhados na disciplina de Físico-Química.

As últimas atividades destinam-se a alunos dos décimo primeiro ou décimo segundo anos.

Na atividade número um os alunos são convidados a explorar diversas propriedades das ondas sonoras, recorrendo a um simulador de ondas numa corda.

Na segunda atividade, recorrendo a fórmulas matemáticas e uma calculadora, os alunos terão de calcular valores de frequência, período e de comprimento de onda de algumas notas musicais.

A terceira atividade reúne diversos exercícios sobre conceitos associados à forma de uma onda periódica.

Na quarta atividade os alunos serão convidados a realizar uma experiência com garrafas e água, na qual vão relacionar o comprimento de uma coluna de ar com a altura do respetivo som.

Na quinta atividade pretende-se que os alunos analisem características de sons puros e de sons complexos, recorrendo a funções trigonométricas e à calculadora gráfica.

Na sexta e última atividade os alunos explorarão a relação que existe entre a intensidade de um som e o nível de intensidade sonora, relação esta que envolve o conceito de logaritmo.

Atividade 1 - Propriedades das ondas sonoras

Através do programa "**Simulador de Ondas numa Corda**" (https://phet.colorado.edu/en/simulation/wave-on-a-string) os alunos serão convidados a explorar diversas caraterísticas das ondas, tais como comprimento, amplitude, período e frequência. As ondas obtidas através deste simulador não correspondem às ondas que se podem obter, por exemplo, beliscando a corda de uma guitarra, uma vez que esta corda não está fixa nas duas extremidades, entre outros fatores.

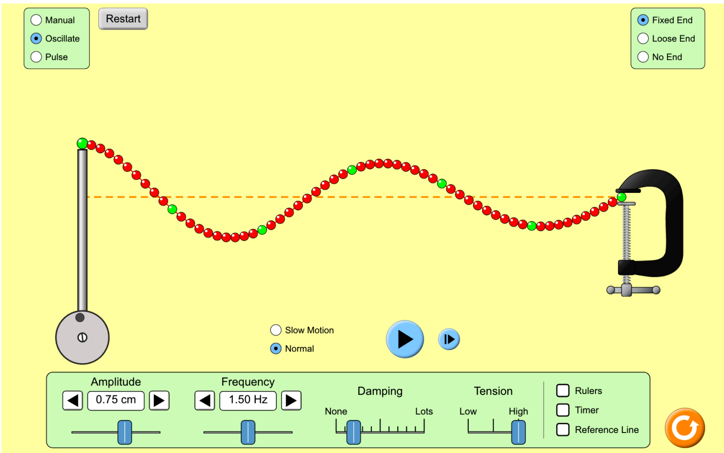


Fig.52: Imagem do simulador

Durante a propagação de uma onda numa corda, importa estudar a forma como os pontos da corda se comportam. O gráfico seguinte ilustra o movimento de vibração do ponto designado pela letra A ao longo do tempo.

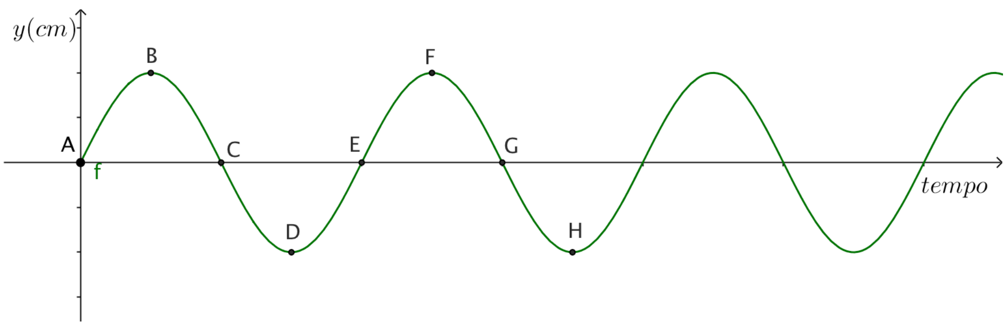


Fig.53: Gráfico da propagação de uma onda

Os instantes assinalados no gráfico com as letras C, E e G representam posições de equilíbrio.

Quando o ponto representado pela letra A, sai da sua posição de equilíbrio, e percorrendo o gráfico, atinge novamente a posição de equilíbrio representada pela letra E, diz-se que realizou um ciclo vibratório completo. Ao longo do tempo o movimento de vibração contempla vários ciclos de vibração, como se pode observar na figura seguinte.

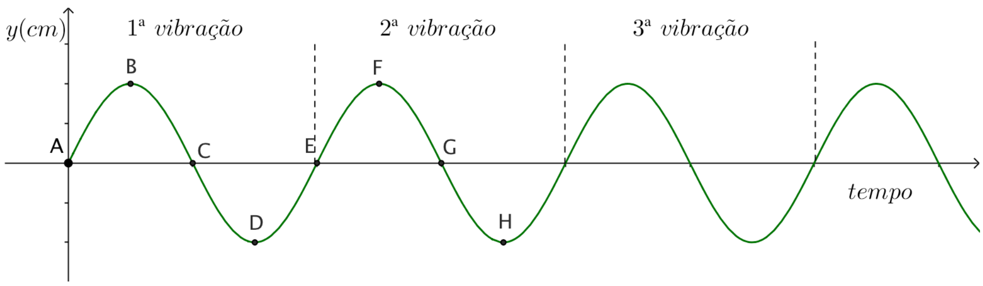


Fig.54: Gráfico da propagação de uma onda: vibrações

De seguida irão ser analisadas algumas caraterísticas das ondas.

<u>**Comprimento de onda**</u>: o comprimento de onda é a distância entre duas partículas consecutivas que se encontram na mesma fase de vibração, ou seja, é a distância percorrida pela onda durante um ciclo de vibração.

A onda da imagem 55 tem comprimento 3,8 cm.

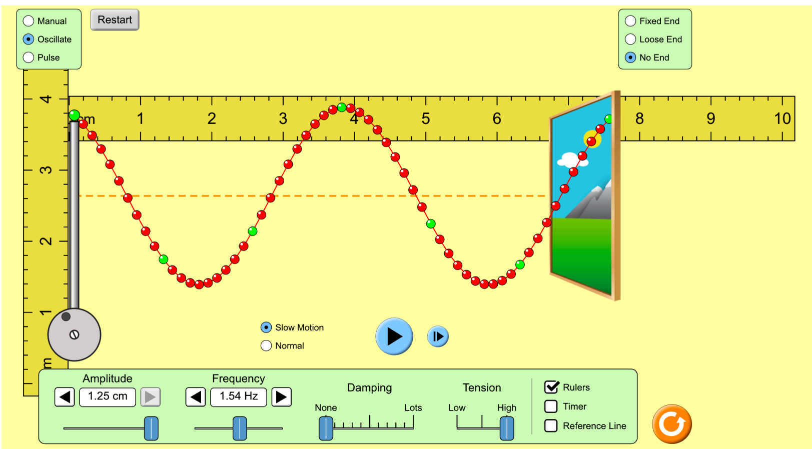


Fig.55: Imagem do simulador com régua

1. Mantendo o valor da amplitude fixa, faça variar o valor da frequência e meça os comprimentos das ondas resultantes. O que observa?

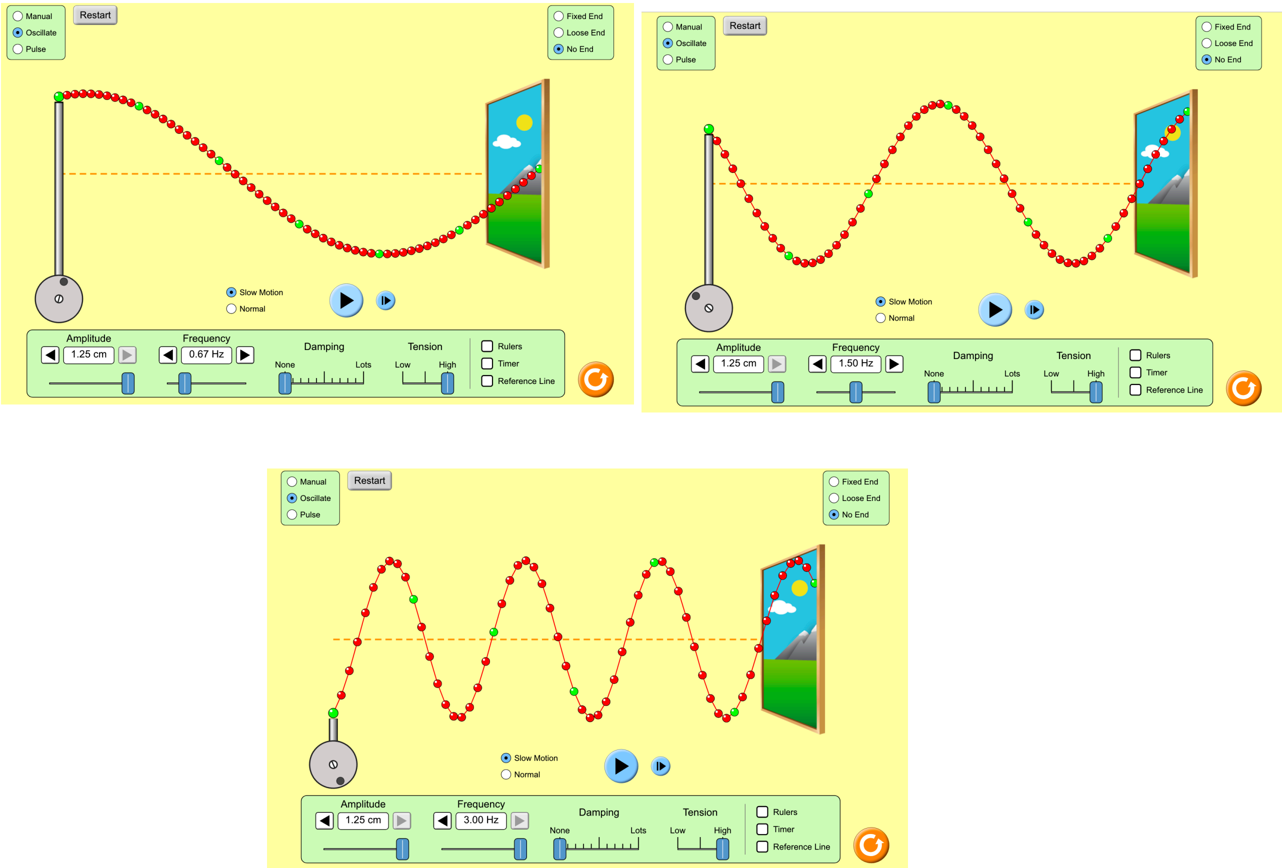


Fig.56, 57 e 58: Imagens do simulador fazendo variar a frequência

<u>Amplitude de vibração</u>: a amplitude de vibração é o valor máximo de afastamento de uma partícula, em relação à posição de equilíbrio.

A onda representada no gráfico da figura 59 tem 1,3 cm de amplitude.

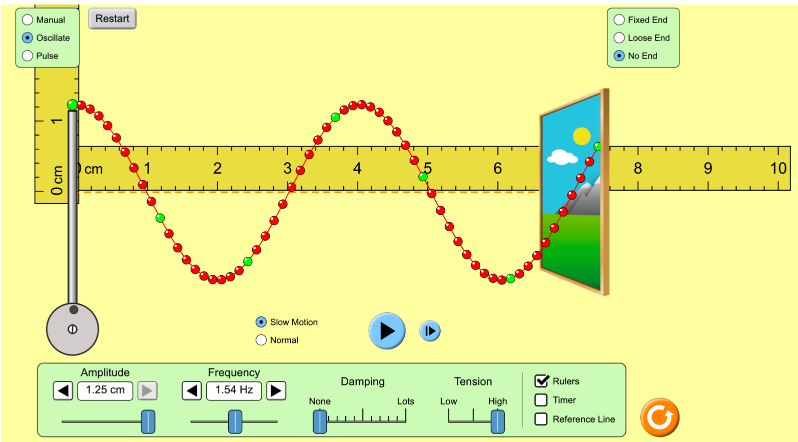


Fig.59: Imagem do simulador com régua

<u>Período</u>: é o tempo necessário para que uma partícula efetue uma vibração completa.

Utilizando o simulador com a mesma configuração do exemplo anterior, ative a opção "Timer".

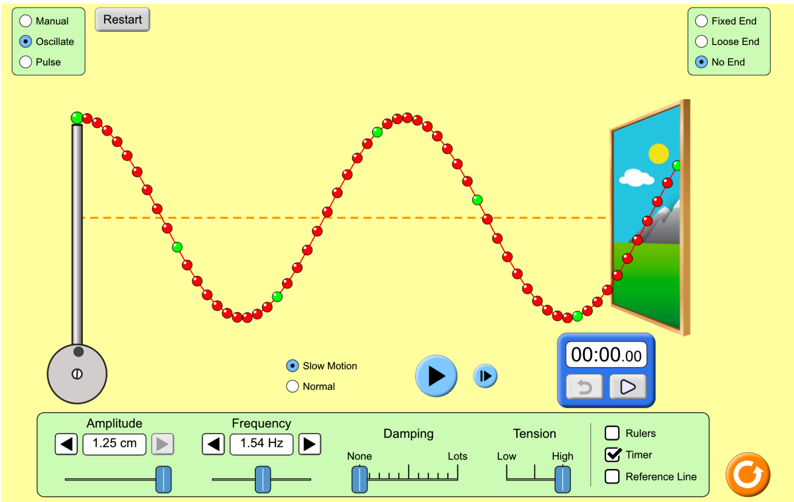


Fig.60: Imagem do simulador

Ative o cronómetro no botão "Start", fixe uma das partículas e espere que ela realize uma vibração completa. Nesse instante coloque a simulação em pausa e verifique o tempo que a partícula demorou a completar uma vibração completa, tal como sugerido na figura seguinte.

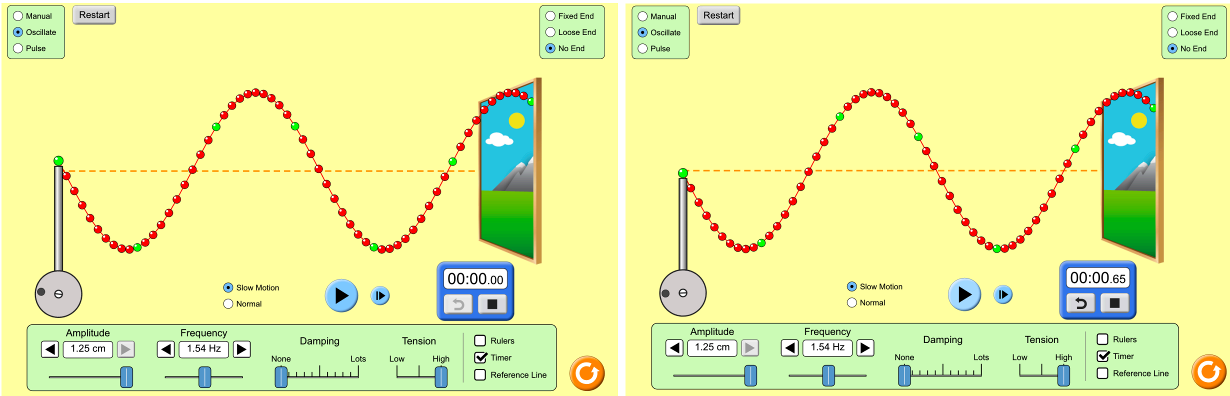


Fig.61 e 62: Medições no simulador

Neste caso o período de vibração foi cerca de 65 centésimos de segundo.

2. Qual é o valor do produto dos valores de frequência pelo período?

3. Faça variar o valor da frequência e meça o tempo que é necessário para que a partícula efetue uma vibração completa. Para cada caso determine o valor do produto das duas grandezas (tempo e frequência). O que observa?

Atividade 2 - Frequência, período e comprimento de onda

Considere os seguintes valores e fórmulas:

Velocidade do som no ar a 15 ºC: v = 344 m/s

Frequência da nota Lá$_4$ = 440 Hz

$f = \frac{1}{p}$ $\qquad$ $p = \frac{1}{f}$ $\qquad$ $c = \frac{v}{f}$ $\qquad$ $f_i = f_0 \sqrt[12]{2^i}$

sendo f a frequência de um som, em Hertz, p o período, medido em segundos, c o comprimento da onda, em metros, v a velocidade do som, em metros por segundo, e f_i representa a frequência de várias notas obtidas a partir duma frequência de base f_0.

Tendo em conta os valores de referência apresentados e as fórmulas para o cálculo das grandezas envolvidas, preencha a tabela, que permite obter a frequência, o período e o comprimento das ondas (no ar a 15º) correspondentes às notas indicadas. Utilize valores aproximados com quatro casas decimais.

Exemplo:

Cálculo da frequência da nota Lá #$_4$: $f_1 = 440\sqrt[12]{2^1} \approx 466{,}1638$

Cálculo da frequência da nota Fá #$_4$: $f_{-3} = 440\sqrt[12]{2^{-3}} \approx 369{,}9944$

Nota	i	Frequência (Hz)	Período (s)	Comprimento (m)
Dó				
Dó #				
Ré				
Ré #				
Mi				
Fá				
Fá #	-3	369,9944		
Sol				
Sol #	-1			
Lá	0	440		
Lá #	1	466,1638		
Si				

Tabela 5: Frequência, período e comprimento de notas musicais

Atividade 3- Grandezas associadas a uma forma de onda periódica

1. Estabeleça a correspondência correta entre as grandezas da coluna A e a respetiva unidade do Sistema Internacional, apresentada na coluna B.

Coluna A
Período
Frequência
Velocidade de propagação da onda
Comprimento de onda

Coluna B
Hz (Hertz)
s (segundo)
m (metro)
m/s (metro por segundo)

Tabela 6: Correspondência entre grandezas e unidades

2. Ao tocar harpa, um músico provoca a vibração das cordas. Uma das cordas efetuou 1500 vibrações por segundo. Considere que a velocidade de propagação do som no ar é de 340 m/s.

Determine o período e o comprimento da onda sonora emitida, no ar.

3. Observe as tabelas seguintes que relacionam a velocidade de propagação do som em meios diferentes.

Meio material	Estado físico	Velocidade de propagação do som (m/s)
A	Líquido	1400
B	Sólido	4500
C	Gasoso	340

Tabela 7: Valores da velocidade de propagação do som nos meios A, B e C, à temperatura de 25ºC.

3.1. Relacione o estado físico dos materiais com a velocidade de propagação do som.

3.2. Uma onda sonora demora 0,001 segundos a percorrer um tubo maciço constituído pelo material da amostra B. Qual o comprimento desse tubo?

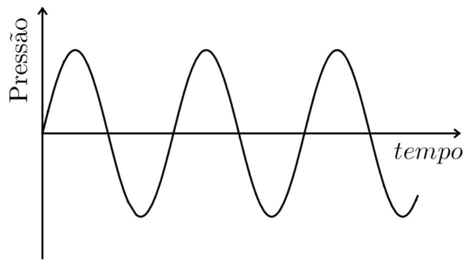
4. Complete o diagrama seguinte, utilizando as palavras do quadro:

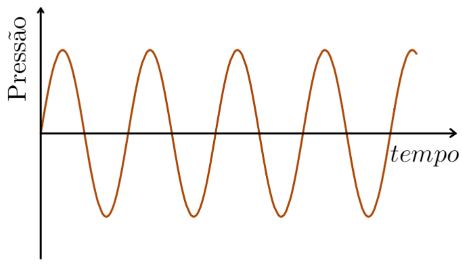
Baixas	*graves*	*altas*	*som*	*agudos*

Altura do ____________

Sons _________ *Sons* _________

____________ *frequências* ____________ *frequências*



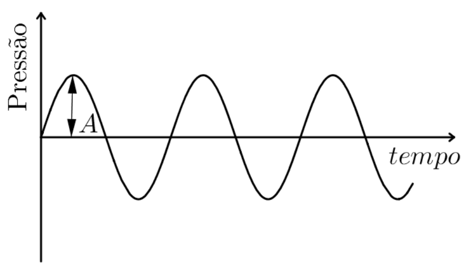


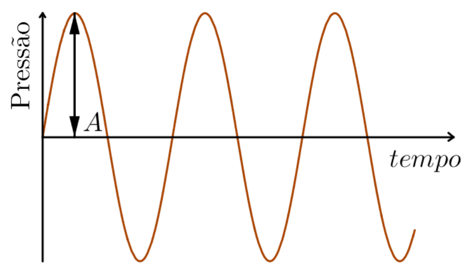
5. Complete o diagrama seguinte utilizando as palavras:

menor amplitude	*fortes*	*maior amplitude*	*fracos*

Intensidade do som

Sons _________ *Sons* _________





_______________ _______________

6. Na imagem seguinte apresentam-se as representações gráficas de duas ondas, a onda A em função do tempo e a onda B em função da distância à fonte de vibração.

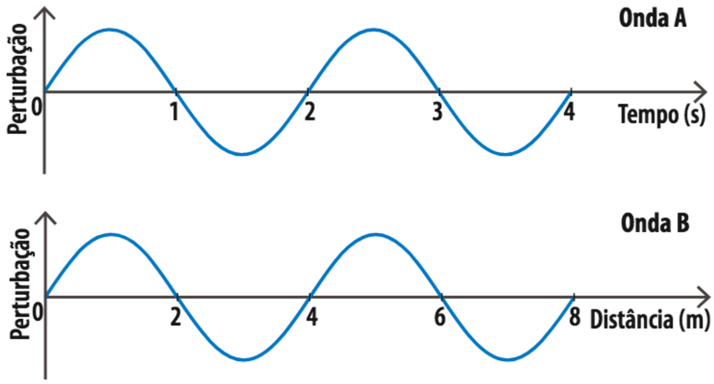


Fig.63: Gráficos de duas ondas

6.1. Relativamente à onda A, assinale, na figura, um intervalo de tempo que possa representar o período da onda. Qual o valor do período desta onda?

6.2. Relativamente à onda B, assinale, na figura, uma distância que possa corresponder a um comprimento de onda. Qual é o valor do comprimento de onda?

6.3. Determine a frequência da onda A.

7. Ao afinar uma corda de uma guitarra, esta efetua 1800 vibrações durante 4 segundos. Determine a frequência de vibração.

Nota: As questões desta atividade foram adaptadas de https://lmsev.escolavirtual.pt/playerteacher/resource/35544/L?se=244&seType=

Atividade 4- Altura do som versus comprimento de uma coluna de ar

Nos instrumentos de sopro as ondas sonoras resultam da vibração de uma coluna de ar dentro do tubo. Consoante a coluna de ar seja mais comprida ou mais curta o som será mais grave ou mais agudo. A atividade prática seguinte permite a compreensão destes conceitos.

Para a realização desta experiência é necessário o seguinte material:

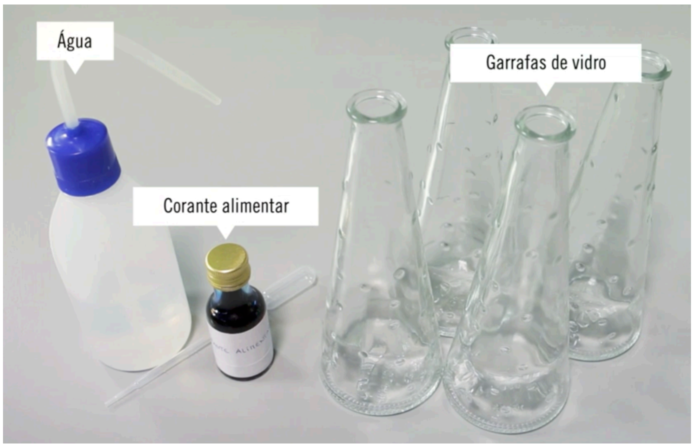


Fig.64: Material necessário

Fonte: https://lmsev.escolavirtual.pt/playerteacher/resource/35559/L?se=244&seType=

Comece por colocar diferentes quantidades de água em cada garrafa. Coloque em cada garrafa algumas gotas de corante alimentar, para que desta forma seja mais fácil visualizar as diferentes alturas de água em cada garrafa.

Fig.65: Diferentes alturas de água nas garrafas

Fonte: https://lmsev.escolavirtual.pt/playerteacher/resource/35559/L?se=244&seType=

1. Sopre horizontalmente sobre o gargalo de cada garrafa. O som obtido é sempre o mesmo?

2. Ao realizar esta experiência verifica-se que o som obtido é diferente em cada garrafa. Porquê?

Nota: Esta experiência pode também ser realizada com uma flauta de bisel.

Para produzir som numa flauta de bisel o músico sopra para dentro do instrumento e, em simultâneo, os dedos vão tapando e destapando os orifícios do corpo da flauta. As ondas sonoras produzidas têm comprimentos diferentes, uma vez que as colunas de ar dentro do instrumento são diferentes. Se, ao soprar na flauta, tapar todos os orifícios da mesma, a coluna de ar é grande, obtendo-se desta forma sons graves. À medida que se vão destapando os orifícios, a coluna de ar vai ficando mais pequena, e os sons obtidos vão-se tornando mais agudos.

Atividade 5- Sons puros e sons compostos

Um som puro ou sinusoidal é constituído por uma única frequência, sendo a forma da onda resultante a forma da função seno ou coseno, como se pode observar na figura seguinte.

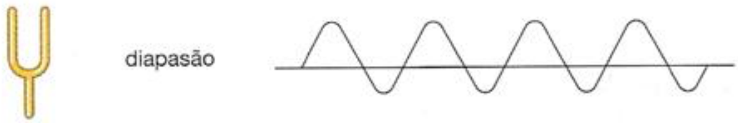


Fig.66: Representação gráfica de um som puro

Fonte: http://gabrielworksinc.wixsite.com/gabrieldeaquino/aulas-de-musica

Matematicamente um som puro é uma função do tempo (t) que pode ser descrita através da seguinte equação:

$$\mathrm{f}(t) = Asen(2\pi f t)$$

onde A é a amplitude e f a frequência.

1. Aceda ao link https://www.geogebra.org/m/tjjDGApM. Aqui pode observar o gráfico resultante de cada nota musical da escala cromática. À medida que a frequência do som aumenta como se comporta o gráfico da função resultante?

2. Recorra agora à calculadora gráfica para representar graficamente o som da nota Lá de frequência 440 Hz e intensidade 1 dB.

Introduza a janela [0; 0,01]x[-1,5; 1,5]

Como foi referido anteriormente, este som é descrito pela função

$$f(x) = sen(2\pi 440x)$$

3. Recorrendo às capacidades da sua calculadora gráfica determine o período desta função. Qual a sua relação com o valor 440? O que significa esse valor?

Os sons que ouvimos não são puros, mas sim sons compostos. Na imagem seguinte podem observar-se as representações gráficas de três sons compostos.

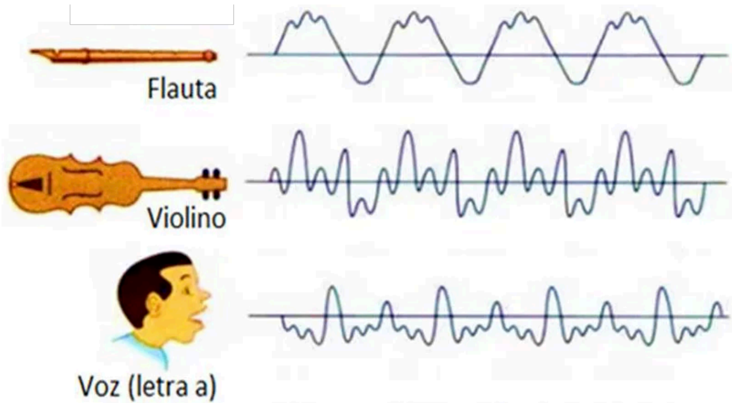


Fig.67: Representações gráficas de sons complexos

Fonte: http://gabrielworksinc.wixsite.com/gabrieldeaquino/aulas-de-musica

Um som composto pode ser decomposto na soma de sons sinusoidais com frequências diferentes (a primeira designa-se por fundamental e as restantes por harmónicos).

Matematicamente pode escrever-se:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n sen(2\pi f_n t)$$

Nesta expressão $f_n = n \times f_1$ representa a frequência de cada harmónico, a partir do fundamental (f_1); k_n representa a amplitude de cada harmónico.

4. Através do link https://www.geogebra.org/m/tycxbu5U explore a forma da onda resultante da soma de três sons sinusoidais.

5. Considere, agora, que a nota Sol, de frequência 100 Hz (aproximadamente), é tocada por dois instrumentos musicais distintos. Quais serão as frequências dos primeiros três harmónicos superiores?

6. Esboce, na calculadora gráfica, os gráficos das funções seguintes, que traduzem o som tocado pelos dois instrumentos.

Introduza a janela [0; 0,02]x[-20; 20]

$$f(x) = 10sen(2\pi 100x) + 4sen(2\pi f_2 x) + 2sen(2\pi f_3 x) + 1sen(2\pi f_4 x)$$
$$g(x) = 10sen(2\pi 100x) + 2sen(2\pi f_2 x) + 1sen(2\pi f_3 x) + 0{,}5sen(2\pi f_4 x)$$

7. Suponha que os dois instrumentos são uma flauta e um violino. Observe a figura 67 e as representações gráficas obtidas com a calculadora e, a partir dessa análise, estabeleça a relação correta entre as funções f e g e os diferentes instrumentos.

Atividade 6 – Intensidade sonora e logaritmos

A intensidade é a característica que nos permite distinguir um som fraco de um som forte. A classificação de um som como forte ou fraco está relacionada com o nível de intensidade sonora, sendo medido em Watt/m^2. Como a intensidade sonora possui uma grande variação de valores a sua utilização é pouco prática. A utilização de escalas logarítmicas facilita a manipulação dos diferentes valores de intensidade sonora.

A relação entre intensidades sonoras permite calcular o nível de intensidade sonora de um som (expresso em decibéis), através da relação: $NIS = 10log\frac{I}{I_0}$.

I_0 representa o limiar da audição humana, sendo igual a $10^{-12}w/m^2$;

I_{max} representa o limiar da dor e é igual a $1w/m^2$.

1. Considere um som que tem uma intensidade igual ao limiar da audição. Qual o valor da intensidade sonora desse som?

2. Considere agora um som com intensidade 10 vezes superior ao valor do limiar da audição. Qual será o valor da intensidade sonora neste caso?

De que forma variam estas duas medidas?

3. Determine o valor da intensidade sonora de um som que seja 100 vezes superior ao limite da audição.

4. Determine o valor da intensidade sonora de um som que seja 1000 vezes superior ao limite da audição.

5. Consegue estabelecer alguma relação entre estas duas grandezas, intensidade (em w/m^2) e nível de intensidade sonora (em dB)?

6. Sabendo que a intensidade do som produzido numa discoteca varia entre 85 e 115 dB, determine entre que valores de intensidade (em w/m^2) variam estes sons.

Capítulo 3 – Um pouco de música

Serão abordados neste capítulo conceitos musicais essenciais para a compreensão dos capítulos seguintes.

A palavra música deriva da palavra grega *musiké téchne*, que significa *a arte das musas*. Grout & Palisca, (1988, pg 17) referem que a mitologia grega atribuía à música origem divina, tendo sido os seus primeiros criadores e intérpretes, os deuses, tais como Apolo, Anfião e Orfeu. Para os gregos a música tinha poderes mágicos, era capaz de curar doenças e de operar milagres na natureza.

Outras civilizações, para além da grega, desenvolveram manifestações musicais próprias, assumindo estas grande importância em diversas atividades coletivas, como os rituais religiosos e as festas populares.

3.1. Notação musical

O epitáfio de Seikilos, um dos mais antigos registos escritos musicais, foi encontrado em Aidine, na Turquia, próximo de Trales, e data, aproximadamente, do século I d.C., referem Grout & Palisca (1988, pg.28). Neste epitáfio o texto e a música estão escritos numa estela ou pedra funerária.

Na lápide encontrada consta também a informação de que a composição foi feita, por um homem chamado Seikilos, para a sua esposa, presumivelmente enterrada no local.

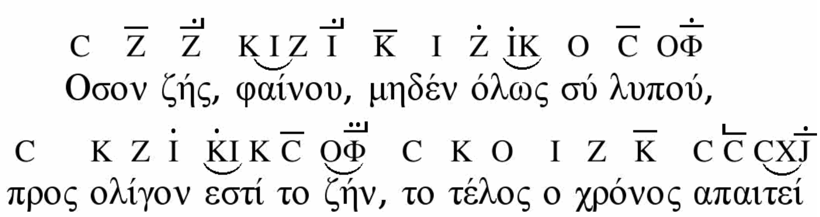


Fig.68: Inscrição na Estela funerária de Aidine.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Epit%C3%A1fio_de_S%C3%ADcilo

A composição musical traduzida em notação musical moderna seria possivelmente assim:

Fig.69: Melodia do Epitáfio de Seikilos

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Epit%C3%A1fio_de_S%C3%ADcilo

Hoje em dia a escrita musical tem regras bem definidas, regras estas que serão explicitadas de seguida.

3.1.1. A pauta

Para representar graficamente a música utiliza-se uma pauta ou pentagrama.

A pauta é um conjunto de cinco linhas horizontais, paralelas e equidistantes, que formam entre si quatro espaços.

Como já foi referido, a pauta pode ser comparada a um referencial onde se definem duas dimensões importantes:

- dimensão temporal, no eixo horizontal, que define a distância cronológica entre eventos sucessivos;
- dimensão tonal, no eixo vertical, que determina a altura das notas.

As linhas (ou os espaços) de um pentagrama numeram-se, de baixo para cima, da primeira à quinta (ou do primeiro ao quarto). Quando a cabeça de uma nota se situa acima da quinta, ou abaixo da primeira linha, desenham-se pequenos segmentos de reta, sugerindo uma extensão da pauta, para se poder visualizar a posição relativa da nota. Estes segmentos denominam-se por linhas suplementares.

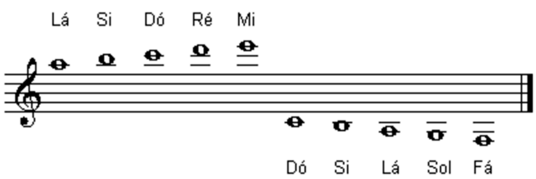


Fig.70: Exemplo de linhas suplementares.

Fonte: www.artmusica.net

3.1.2. Elementos representativos das alturas

A clave é um símbolo que serve para indicar o nome das notas, escritas numa pauta, e que determina a altura que as mesmas representam.

Atualmente utilizam-se essencialmente três tipos de claves, como se pode observar na figura seguinte, sendo um deles utilizado em duas posições diferentes.

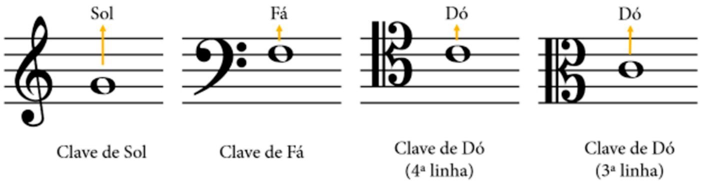


Fig.71: Claves na pauta

Fonte:http://primariaemusica.blogspot.pt/2016/06/como-ler-partituras-pentagrama-e-claves.html

Na clave de sol, a nota que se encontra na segunda linha é o sol (acima do dó central). Na clave de fá a nota que se encontra na quarta linha é o fá (abaixo do dó central). A clave de dó pode ser colocada em dois locais diferentes, como se pode observar na figura. No primeiro caso o dó central é colocado sobre a quarta linha, no segundo caso o dó central é colocado sobre a terceira linha. A utilização destas claves está relacionada com a variedade de tessituras dos instrumentos que fazem parte da orquestra clássica.

Dó central é a nota dó que se encontra na oitava central (quarta oitava) do piano. Esta nota representa-se por $Dó_4$.

Na imagem seguinte podem observar-se as diferentes oitavas no piano e a colocação na pauta de algumas notas dó.

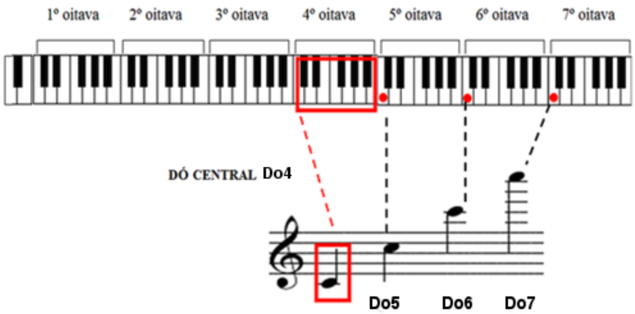


Fig.72: Oitavas no piano

Fonte: http://www.descomplicandoamusica.com/como-ler-partitura/

3.1.3. Elementos representativos da duração dos sons

3.1.3.1. Notas

As notas musicais são um conjunto de sinais que se utilizam para representar os sons musicais. A posição da nota na pauta determina a sua altura e a forma da nota determina a duração do som.

Existem sete notas musicais que se designam, atualmente, pelos seguintes nomes: dó, ré, mi, fá, sol, lá e si. Segundo Abdounur (2006), os primeiros seis (inicialmente Ut, Re, Mi, Fa, Sol, La) foram atribuídos, durante o século XI, pelo monge italiano Guido d'Arezzo. O monge baseou-se num texto sagrado, em latim, do hino a São João Batista:

Ut queant laxis
Resonare fibris
Mira gestorum
Famuli tuorum
Solve polluti
Labii reatum
Sancte **I**oannes

Traduzido para português obtém-se: "Para que teus grandes servos possam ressoar claramente a maravilha dos teus feitos, limpe nossos lábios impuros, ó São João.".

Segundo o mesmo autor, cerca de seis séculos mais tarde, a palavra Ut seria substituída pelo nome Dó, para facilitar o canto com a terminação da sílaba em vogal. O Si, foi acrescentado, também mais tarde, havendo alguns autores que sugerem terem sido tomadas as iniciais da palavra Sancte e do nome Ioannes.

3.1.3.2. Figuras

As figuras musicais são as formas das notas e servem para representar o tempo de duração das mesmas.

Atualmente a figura base é a semibreve, mas nem sempre assim foi. Antigamente eram comuns também a breve, a longa e a máxima, mas hoje em dia raramente são utilizadas. A breve tem a duração equivalente ao dobro da duração da semibreve. A longa tem a duração de quatro semibreves e a máxima tem a duração de oito semibreves.

Hoje em dia a notação musical mais comum utiliza sete figuras. Os seus nomes, e respetivas durações, em relação à semibreve, são apresentados na tabela seguinte.

Nome	Figura	Duração, em relação à semibreve
Semibreve	𝅝	1
Mínima	𝅗𝅥	$\frac{1}{2}$
Semínima	𝅘𝅥	$\frac{1}{4}$
Colcheia	𝅘𝅥𝅮	$\frac{1}{8}$
Semicolcheia	𝅘𝅥𝅯	$\frac{1}{16}$
Fusa	𝅘𝅥𝅰	$\frac{1}{32}$
Semifusa	𝅘𝅥𝅱	$\frac{1}{64}$

Tabela 8: Duração de figuras em relação à semibreve

3.1.3.3. Pausas

As pausas são um conjunto de símbolos que servem para indicar a duração de momentos de silêncio.

Nome	Pausa	Duração, em relação à semibreve
Semibreve	𝄻	1
Mínima	𝄼	$\frac{1}{2}$
Semínima	𝄽	$\frac{1}{4}$
Colcheia	𝄾	$\frac{1}{8}$
Semicolcheia	𝄿	$\frac{1}{16}$
Fusa	𝅀	$\frac{1}{32}$
Semifusa	𝅁	$\frac{1}{64}$

Tabela 9: Duração de pausas em relação à semibreve

3.1.3.4. Pontos de aumentação

As notas e as pausas podem ser aumentadas em metade da sua duração. Para tal coloca-se um ponto à direita da nota ou da pausa, como se pode observar no seguinte exemplo:

𝅗𝅥. = 𝅗𝅥 + 𝅘𝅥

3.2. Compassos

O compasso serve para dividir a música em intervalos de tempo iguais, com o objetivo de organizar a estrutura e facilitar a leitura. Ao longo da pauta os compassos são identificados por linhas verticais que atravessam o pentagrama.

Os compassos podem ser organizados de duas formas diferentes: tendo em conta o número de tempos que o compõem ou o tipo de divisão de cada tempo.

Tendo em conta o número de tempos de cada compasso, os mais habituais são: compasso binário, quando é formado por dois tempos; compasso ternário, formado por três tempos; e compasso quaternário, quando é formado por quatro tempos.

Se os tempos de um compasso tiverem uma subdivisão binária, o compasso designa-se por simples, se a subdivisão de cada tempo for ternária, este diz-se composto.

No início de cada secção musical são colocados dois números (um sobre o outro) que definem o compasso.

O valor de cima indica o número de figuras existentes no compasso, e o valor de baixo corresponde ao valor dessas figuras. À semibreve equivale o número um, à mínima o número dois, à semínima o número quatro, à colcheia o número oito, etc. seguindo com potências de base 2. Habitualmente, num compasso simples, o valor de baixo indica a figura que corresponde à unidade de tempo, enquanto que num compasso composto este valor corresponde à figura que preenche uma subdivisão da unidade de tempo.

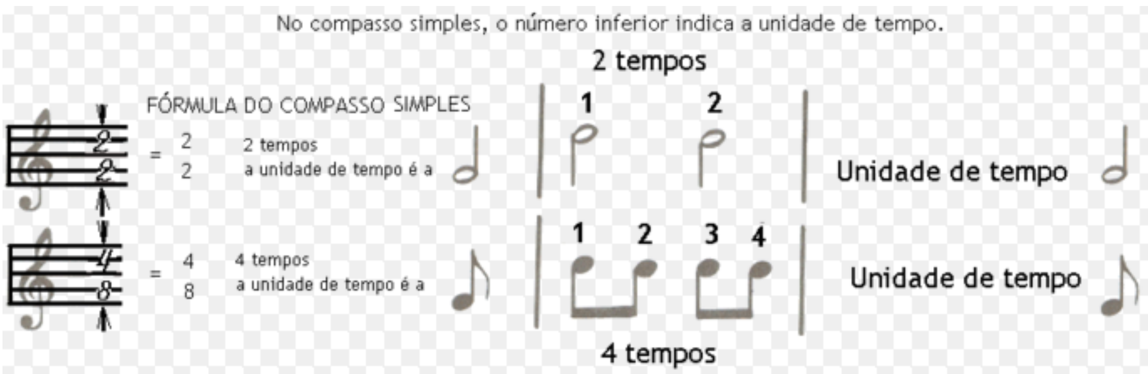


Fig.73: Esquema da forma de compassos simples

Fonte: conservatorio0.tripod.com/formula_compassos_.htm

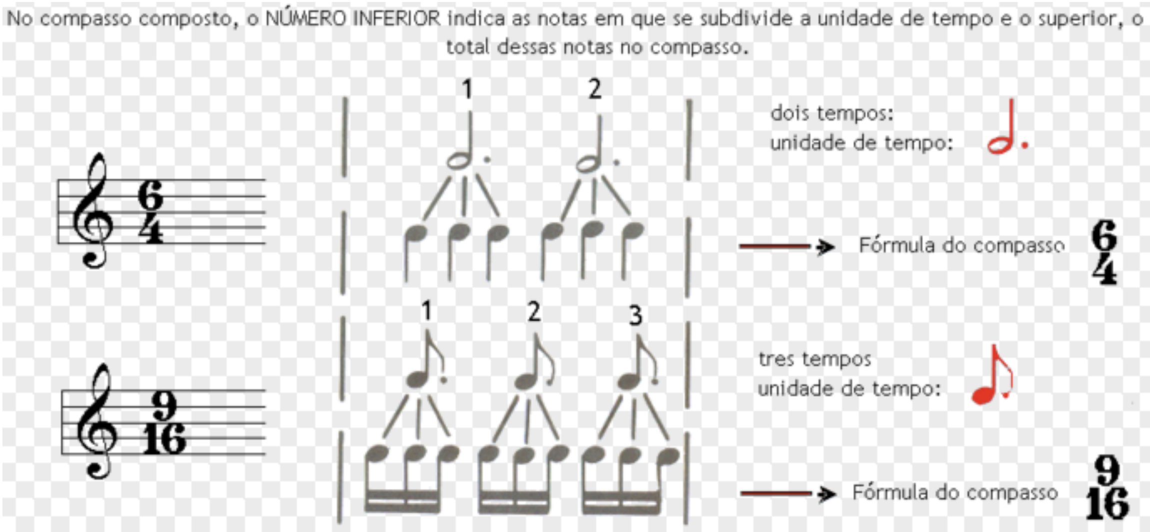


Fig.74: Esquema da forma de compassos compostos

Fonte: conservatorio0.tripod.com/formula_compassos_.htm

Os compassos mais frequentes são os seguintes:

	2 tempos	3 tempos	4 tempos
Compasso simples	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$
Compasso composto	$\frac{6}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{12}{8}$

Tabela 10: Esquema de compassos

3.3. Pitágoras e a experiência do monocórdio

Consta que Pitágoras (572-497), ao passar por uma oficina, ouviu o som de cinco martelos a bater numa bigorna, ver por exemplo Rodrigues (1999). Admirado com o som agradável, e pensando inicialmente que a qualidade do som era proveniente da força das mãos, ele realizou diversas experiências trocando os martelos, tendo constatado que cada um conservava o som que lhe era próprio. Após retirar um martelo, cujo som lhe era desagradável, pesou os outros quatro e constatou que o primeiro pesava doze unidades, o segundo nove, o terceiro oito e o quarto seis unidades. Esta unidade de peso é desconhecida.

Os pitagóricos consideravam o número quatro como a origem de todo o universo, e de todo o mundo material, representando a matéria nos seus quatro elementos integradores: fogo, ar, terra e água. A importância do número quatro para os pitagóricos emerge ainda no cenário musical, ao considerar o tetracorde - sistema de quatro sons - como elementar e fundamental na música grega, como refere Abdounor (2006).

Ainda segundo o mesmo autor, os números 12, 9, 8 e 6 constituem um conjunto muito interessante, também pelas suas propriedades aritméticas. Os números 12 e 6 têm como média aritmética o número 9 e como média harmónica o número 8. Com as suas experiências, Pitágoras descobriu mais algumas relações entre estes números. O martelo que pesava 6 unidades correspondia a metade do peso do martelo que pesava 12 unidades. O martelo que pesava 8 unidades correspondia a dois terços do peso do martelo com 12 unidades, assim como o martelo com 9 unidades de peso correspondia a três quartos do peso do martelo com 12 unidades. A figura seguinte ilustra algumas das descobertas de Pitágoras, sobre as consonâncias sonoras.

Fig.75: Ilustração de Franchinus Gafurius (Theorica musicae, 1492)

Fonte: Rodrigues, J. (1999)

Pitágoras realizou, também, diversas experiências com um instrumento chamado monocórdio (mono (um) + córdio (corda)) que consiste de uma caixa de madeira com apenas uma corda, como se pode observar na figura seguinte.

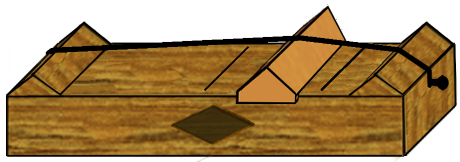


Fig.76: Imagem de um monocórdio
Fonte: http://clubes.obmep.org.br/

Pitágoras com as suas experiências observou que, pressionando a corda num ponto situado a meio do comprimento desta $\left(\frac{1}{2}\right)$, e tocando-a de seguida, esta produzia um som reconhecido como sendo muito semelhante ao som da corda solta, porém mais agudo ver, por exemplo, Rodrigues (1999). Pitágoras denominou esta relação entre as duas notas como intervalo de “diapasão”, atualmente denominado de oitava.

Da mesma forma, exercendo pressão a $\frac{2}{3}$ da extremidade da corda, este novo som tinha uma certa relação com o som inicial, a corda solta. Esta nova relação intervalar é conhecido atualmente por quinta, tendo sido denominado de “diapente” por Pitágoras. Já a pressão exercida a $\frac{3}{4}$ da extremidade da corda produz uma relação intervalar conhecida por quarta, tendo sido chamada por Pitágoras de “diatessaron”.

Estas relações intervalares, exploradas por Pitágoras, a partir de frações da corda, foram posteriormente denominados por **consonâncias pitagóricas**.

Os números utilizados nestas frações, o 1, 2, 3 e 4, têm soma 10, número este que, para os pitagóricos, era considerado um número mágico.

3.4. Intervalos e escalas musicais

Ao longo do tempo a divisão da oitava em intervalos mais pequenos foi sendo feita de diversas formas. Chamamos escala musical a uma sucessão de notas que dividem uma oitava em diversas partes. A construção das escalas musicais mais utilizadas hoje (as escalas maiores e menores baseadas num temperamento igual) tem por base certas relações de proporção entre as diversas notas.

3.4.1. Intervalos

Um intervalo é uma relação entre duas notas que representam sons de alturas diferentes. Os intervalos denominam-se por números (que correspondem ao número de notas que encerram) e qualificam-se como sendo maiores, menores, perfeitos, aumentados e diminutos, dependendo do número de tons e meios tons que contêm.

Segundo o número de notas que encerram, existem oito intervalos inferiores à oitava: de uníssono, se contém a mesma nota duas vezes, de segunda, se contém duas notas, de terceira, quarta, quinta, sexta, sétima e oitava, como sugere a figura seguinte.

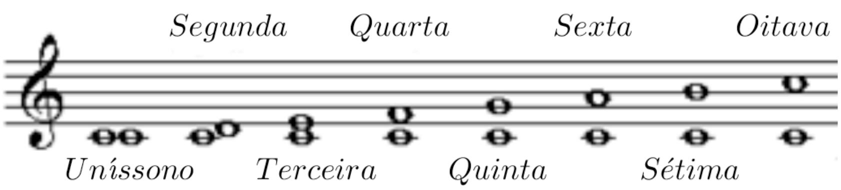


Fig.77: Exemplo de intervalos

Como já referido, a qualificação dos intervalos é efetuada de acordo com o número de tons e de meios tons que o intervalo contem. Esta classificação é feita utilizando os termos maiores, menores, perfeito (ou justo), aumentado ou diminuto.

Um intervalo menor quando diminuído de meio tom transforma-se num intervalo diminuto. Um intervalo maior quando aumentado em meio tom transforma-se num intervalo aumentado. A classificação dos intervalos pode ser observada na tabela seguinte.

Nº de tons	Intervalo	Abreviatura
0	Uníssono	1ºP
$1/2$ tom	Segunda menor	2ªm
1 tom	Segunda maior	2ªM
1 tom mais $1/2$ tom	Terceira menor	3ªm
2 tons	Terceira maior	3ªM
2 tons mais $1/2$ tom	Quarta perfeita	4ªP
3 tons 2 tons e 2 meios tons	Quarta aumentada Quinta diminuta	
3 tons mais $1/2$ tom	Quinta perfeita	5ªP
3 tons e 2 meios tons	Sexta menor	6ªm
4 tons mais $1/2$ tom	Sexta maior	6ªM
4 tons e 2 meios tons	Sétima menor	7ªm
5 tons mais $1/2$ tom	Sétima maior	7ªM
5 tons e 2 meios tons	Oitava perfeita	8ªP

Tabela 11: Classificação de intervalos

A título de exemplo, o intervalo de lá a dó contém três notas, designando-se por isso como intervalo de terceira. Como o intervalo entre lá e si forma um tom e de si a dó meio tom, este intervalo é qualificado de menor. Trata-se, então, de um intervalo de terceira menor.

Fig.78: Intervalo de terceira menor

Fonte: Artur Fão (1937, pg.17)

3.4.2. A escala Pitagórica

Apesar de não haver registos escritos que o demonstrem, pensa-se que a primeira divisão da oitava tenha sido desenvolvida por Pitágoras, Frazer (2001). Esta divisão baseava-se apenas nos intervalos de quinta (2/3 do comprimento da corda) e oitava (1/2 do comprimento da corda).

A simplicidade das razões $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$, que estão associadas ao intervalo de quinta e oitava, tiveram um papel preponderante, e permitiram aos teóricos medievais construir uma escala de sete notas, designada hoje em dia por escala Pitagórica.

Uma forma de obter esta escala é a seguinte:

Considere-se o som produzido pela corda solta do monocórdio, de comprimento uma unidade, o qual iremos designar, através dos valores de referência musicais, por $Dó_4$.

A $\frac{2}{3}$ dessa corda corresponde o som que está uma quinta acima do $Dó_4$, que se designa por Sol_4, $\frac{2}{3}\times 1 = \frac{2}{3}$.

A $\frac{2}{3}$ do comprimento de Sol_4 corresponde o som $Ré_5$, que se encontra a uma quinta de Sol_4, e é mais agudo que o $Dó_5$, pois em relação ao comprimento inicial, $Dó_5$ corresponde a metade do comprimento inicial e $Ré_5$ corresponde a $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ do comprimento da corda, $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$.

A $\frac{2}{3}$ do comprimento de $Ré_5$ corresponde o som $Lá_5$, cujo comprimento, em relação ao comprimento da corda inicial, corresponde a $\frac{2}{3}\times\frac{4}{9} = \frac{8}{27}$.

A uma quinta do som $Lá_5$ corresponde o som Mi_6 $\frac{2}{3}\times\frac{8}{27} = \frac{16}{81}$, e a uma quinta deste som encontra-se o som Si_6 $\frac{2}{3}\times\frac{16}{81} = \frac{32}{243}$.

Para preencher o intervalo de comprimentos de corda entre $Dó_4$ e $Dó_5$, com as novas notas, é necessário obter os comprimentos de corda das notas $Ré_4$, $Lá_4$, Mi_4

e Si_4. Para obter um som que se encontra n oitavas abaixo de um determinado som de comprimento x basta calcular o valor de $2^n x$.

Nota	Comprimento da corda
$Ré_4$	$2\times\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$
$Lá_4$	$2\times\frac{8}{27}=\frac{16}{27}$
Mi_4	$2^2\times\frac{16}{81}=\frac{64}{81}$
Si_4	$2^2\times\frac{32}{243}=\frac{128}{243}$

Tabela 12: Comprimento da corda para as notas indicadas

Para determinar o comprimento da nota $Fá_4$, nota esta que se encontra uma quinta abaixo de $Dó_5$, procede-se de forma análoga à anterior,

$$\frac{2}{3}\times x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$$

Quadro resumo da relação entre o comprimento de uma corda e o som obtido:

$Dó_4$	$Ré_4$	Mi_4	$Fá_4$	Sol_4	$Lá_4$	Si_4	$Dó_5$
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Tabela 13: Relação entre o comprimento de uma corda e o som obtido

Uma vez que o comprimento de uma corda e a frequência da nota resultante são grandezas inversamente proporcionais, é possível estabelecer uma relação entre as frequências das notas, relativamente à frequência da nota mais grave $Dó_4$, como se pode observar na tabela 14.

$Dó_4$	$Ré_4$	Mi_4	$Fá_4$	Sol_4	$Lá_4$	Si_4	$Dó_5$
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

Tabela 14: Relação entre as frequências das notas

As notas desta escala encontram-se separadas por razões intervalares diferentes, que se calculam da seguinte forma: $\frac{Fá_4}{Mi_4} = \frac{4}{3} \div \frac{81}{64} = \frac{4 \times 64}{3 \times 81} = \frac{9}{8}$

Nota	$Dó_4$	$Ré_4$	Mi_4	$Fá_4$	Sol_4	$Lá_4$	Si_4	$Dó_5$
Razão de frequências em relação ao $Dó_4$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
Razão de frequências entre notas consecutivas	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	

Tabela15: Razões intervalares na escala Pitagórica

Estas razões intervalares designam-se por intervalo de tom, no caso da razão $\frac{9}{8}$ e por intervalo de meio tom no caso da razão intervalar $\frac{256}{243}$.

A escala de sete notas descrita em cima é formada por cinco tons e dois meios tons, que se distribuem da seguinte forma:

Dó---Ré---Mi///Fá---Sol---Lá---Si///Dó

onde --- representa um tom e /// representa meio tom.

Esta estrutura de tons e meios tons manteve-se até aos dias de hoje tendo havido apenas uma pequena alteração na definição das razões intervalares, de forma a que dois meios tons seguidos correspondam, de facto, a um tom, o que não acontece neste caso $\left(\frac{256}{243} \times \frac{256}{243} \neq \frac{9}{8}\right)$.

3.4.3. O coma pitagórico

Se for aplicado, por doze vezes sucessivas, o ciclo de quintas ao som Dó$_0$ deverá obter-se o som Dó$_7$.

Considere-se a frequência de Dó$_0$=f. A frequência correspondente a Dó$_7$ será $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} f$, uma vez que se trata da aplicação, por doze vezes, do intervalo de quinta ascendente a Dó$_0$.

No entanto, como Dó$_7$ se encontra sete oitavas acima de Dó$_0$, a sua frequência será $2^7 f$.

O desfasamento entre estas duas frequências é quantificado pela razão

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12} f}{2^7 f} = 1{,}0113643265$$

que se denomina de coma pitagórico.

O coma pitagórico mostra que o sistema pitagórico de quintas, apesar de ser acusticamente puro (os intervalos de 5ª e 4ª são os mais puros possíveis), não se pode ajustar a um ciclo de oitavas. Qualquer que seja o número de quintas sucessivas que se apliquem a um som inicial, o som resultante nunca se poderá igualar através de sucessivas oitavas aplicadas a esse mesmo som inicial, isto é $\left(\frac{3}{2}\right)^{m} \neq 2^{n}$, quaisquer que sejam os valores inteiros de m e n.

Para além do desajuste entre quintas e oitavas, o sistema pitagórico mostrou ter outro inconveniente quando confrontado com o desenvolvimento da composição musical, devido ao facto já mencionado de dois meios tons seguidos não perfazerem um tom:

$$\frac{256}{243} \times \frac{256}{243} \neq \frac{9}{8}$$

Suponhamos que se pretende dividir o intervalo de oitava (Dó$_0$ a Dó$_1$) em doze partes iguais, de forma a que o intervalo entre as sucessivas notas seja sempre igual. Para que tal aconteça, a razão entre as frequências de notas sucessivas terá de ser constante.

Como qualquer nota do sistema pitagórico é obtido por quintas e oitavas, a expressão geral para a frequência de qualquer nota é dada por

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{a} . 2^{b} \text{ , com } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Seja f_i , com $i = 1, 2, \dots, 12$, sendo $f_1 = 1$ e $f_{12} = 2$ a frequência de cada nota que divide a oitava da forma pretendida.

Como se pretende dividir a oitava em intervalos iguais tem-se:

$$\frac{f_2}{1} = \frac{f_3}{f_2} = \dots . = \frac{2}{f_{11}}$$

Donde se conclui que $\frac{f_2}{1} \times \frac{f_3}{f_2} \times \dots \times \frac{2}{f_{11}} = 2$, ou seja $\left(\frac{f_2}{1}\right)^{12} = 2$

Logo terão de existir dois números inteiros a e b tais que $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{a} . 2^{b}\right)^{12} = 2$

$\Leftrightarrow \; 3^{12a} . 2^{12(b-a)} = 2$

$\Rightarrow \; 12a = 0 \; \wedge \; 12(b-a) = 1$

$\Leftrightarrow \; a = 0 \; \wedge \; b = \frac{1}{12}$ o que contraria o facto de b ser um número inteiro.

A divisão da oitava em doze partes iguais remete-nos então para a questão da incomensurabilidade, assunto com o qual os antigos gregos se depararam por várias vezes.

3.4.4. A escala Diatónica de Zarlino

O teórico musical e compositor italiano, Gioseffo Zarlino (1517-1590), na procura de uma afinação natural o mais "pura" possível, criou uma escala nova, tendo por base uma organização das notas de forma um pouco diferente da escala pitagórica, Abonour (2006).

Partindo do Dó$_4$ (considerado aqui como nota de referência a partir da qual são calculados os intervalos e relações de frequências), e utilizando os intervalos de quinta (ascendente e descendente), obtêm-se as duas notas seguintes, consideradas como mais importantes, o $Fá_4$ e o Sol_4.

O Sol_4 encontra-se uma quinta acima do $Dó_4$, com frequência relativamente à do $Dó_4$, $\frac{3}{2}\times 1=\frac{3}{2}$.

O $Fá_4$ encontra-se uma quinta abaixo de $Dó_5$, obtendo-se a sua frequência relativa através da expressão $\frac{3}{2}\times x=2\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$.

As notas Mi_4, $Lá_4$ e Si_4, obtêm-se a partir das notas $Dó_4$, $Fá_4$ e Sol_4, respetivamente, através de intervalos de terceira (partindo da relação de frequências de $\frac{5}{4}$).

Frequência da nota Mi_4: $\frac{5}{4}\times 1=\frac{5}{4}$

Frequência da nota $Lá_4$: $\frac{5}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$

Frequência da nota Si_4: $\frac{5}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{8}$

Por fim calcula-se a frequência da nota $Ré_4$ que se situa uma quinta acima do Sol_3.

Frequência da nota $Ré_4$: $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{8}$

Quadro que ilustra a relação entre a frequência de uma nota e a frequência da primeira nota $Dó_4$.

$Dó_4$	$Ré_4$	Mi_4	$Fá_4$	Sol_4	$Lá_4$	Si_4	$Dó_5$
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

Tabela 16: Relação entre a frequência de uma nota com a frequência de $Dó_4$

As notas desta escala também se encontram separadas por razões intervalares diferentes, como se pode observar na tabela 17.

Nota	Dó$_4$	Ré$_4$	Mi$_4$	Fá$_4$	Sol$_4$	Lá$_4$	Si$_4$	Dó$_5$
Razão de frequências em relação ao Dó$_4$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
Razão de frequências entre notas consecutivas		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

Tabela 17: Razões intervalares na escala Diatónica de Zarlino

A escala Diatónica não escapa aos problemas que invariavelmente acompanham a incompatibilidade existente entre os intervalos de oitava, de quinta e de terceira. Quase todas as suas quintas têm uma relação de $\frac{3}{2}$, mas a quinta Ré-Lá é ligeiramente menor, $\frac{40}{27}$.

3.4.5. Zarlino e o mesolábio

Existiram ao longo da história várias propostas para dividir a oitava em partes iguais de forma mais ou menos rigorosa. Zarlino na sua obra "Le Instituioni Harmoniche", publicada em 1588-1589, no capítulo "Como dividir um intervalo musical em duas partes iguais" ("*In qual modo si possa divider qual si voglia intervallo musicale in due parti eguali*"), descreve uma forma de como dividir uma corda, de forma a que um certo intervalo musical fique dividido em dois intervalos iguais, de forma teoricamente exata, através de um mecanismo que designou por *"Geometri Orthogonio"*.

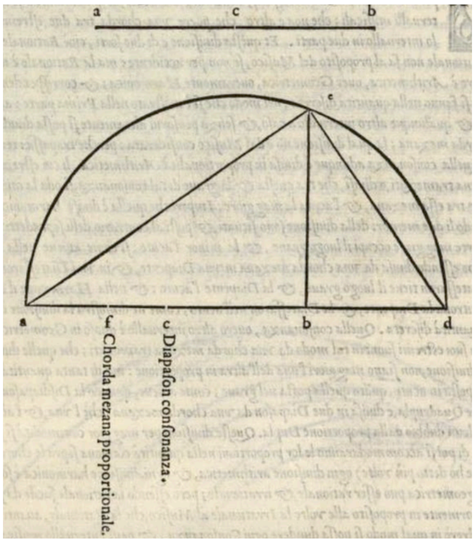


Fig.79: Imagem de “Geometri Orthogonio”
Fonte: “Le Instituioni Harmoniche” (pág. 94)

Tal como referido na secção 1.2.2., a altura do triângulo maior $\overline{BC}$ é a média geométrica entre os comprimentos dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$. Escolhendo convenientemente a posição do ponto B de modo a que os segmentos $[AB]$ e $[BD]$ formem o intervalo musical inicial, o segmento $[BC]$ terá o comprimento correto para dividir esse intervalo em dois iguais. Este procedimento embora simples e prático não permite dividir um intervalo em mais do que duas partes iguais.

Noutro capítulo, intitulado “Outra forma de dividir um intervalo musical em duas ou mais partes iguais” (“*Um altro modo di divider qual si voglia consonanza, overo Intervallo musicale, in due, overo in più parti equali*”), Zarlino utiliza um instrumento mecânico, designado de mesolábio, para dividir a oitava em três ou mais partes iguais.

Utilizando o mesolábio Zarlino propõe, em 1588, no seu livro “Soppli*menti Musicali*”, a divisão do braço de um Alaúde em doze partes iguais, como se pode observar na figura seguinte.

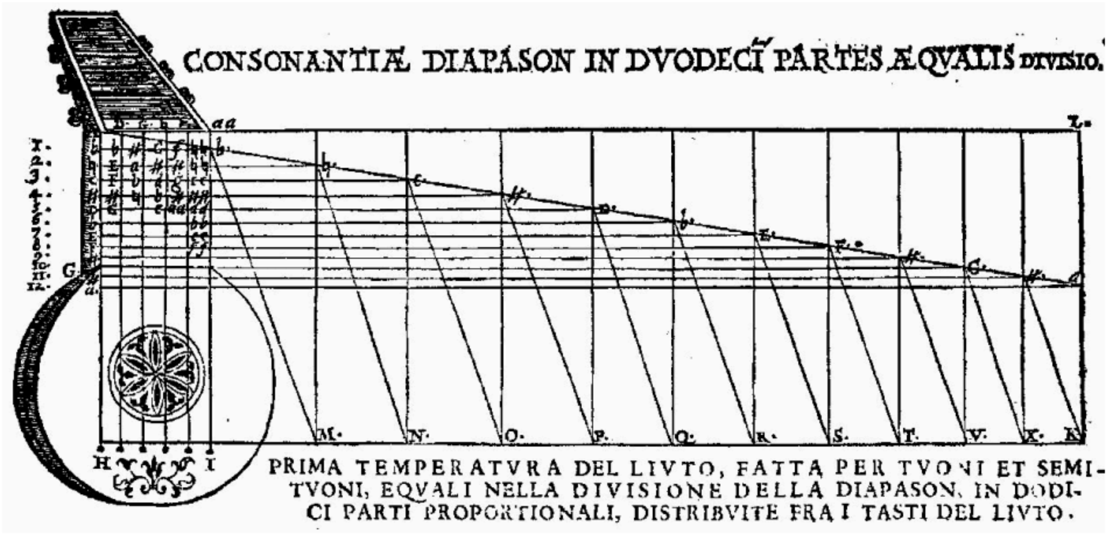


Fig.80: Divisão do braço de um Alaúde utilizando o mesolábio, segundo Zarlino.
Fonte: Urreiztieta, C. (2013)

Como refere Urreiztieta (2013), o mesolábio é um instrumento mecânico, descrito em documentos gregos antigos, que permite determinar médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados.

Este instrumento, que se pode observar na figura seguinte, é formado por uma placa de madeira (ou outro material) de forma retangular, com duas calhas colocadas sobre os lados mais compridos. Nestas calhas movimentam-se placas iguais (no mínimo duas) de forma retangular (com uma das suas diagonais desenhadas), que poderão ser de madeira fina, metal ou cartão.

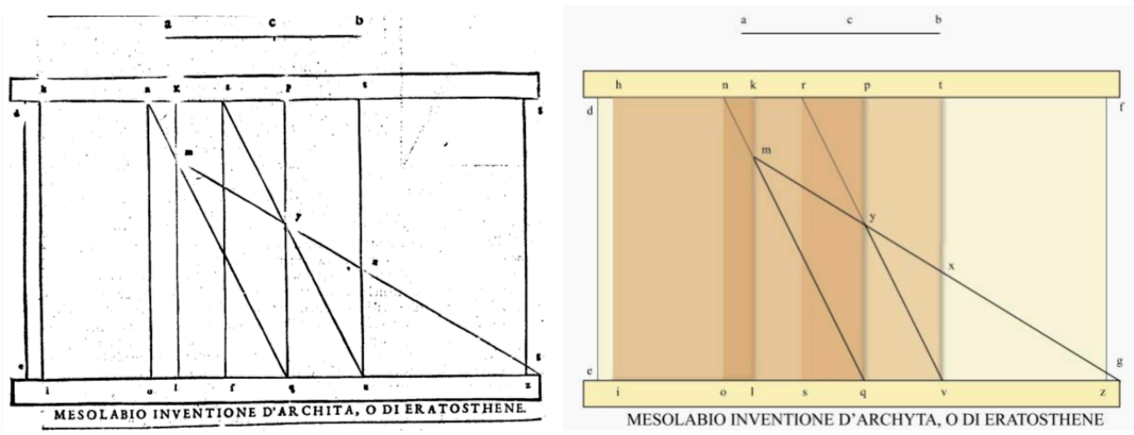


Fig.81: Imagens do mesolábio de Zarlino
Fonte: Urreiztieta (2013)

A figura seguinte ilustra uma representação atual do mesolábio, com três placas retangulares, na sua forma inicial, ou seja, antes da movimentação dos retângulos.

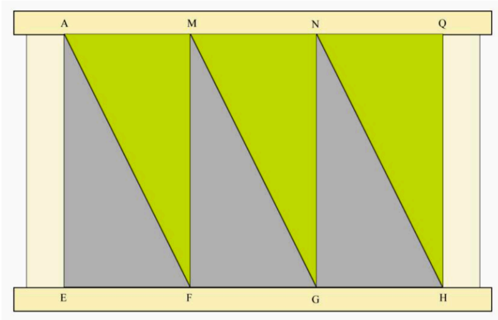


Fig.82: Representação atual do mesolábio
Fonte: Urreiztieta (2013)

Neste caso, o instrumento permite determinar duas médias proporcionais entre os segmentos de reta [AE] e uma parte do segmento [QH].

Para obter as médias pretendidas, em primeiro lugar prende-se, no ponto A, uma das extremidades de um fio, sendo a outra extremidade fixa na calha inferior do mesolábio num ponto distante do último retângulo. De seguida fazem-se deslizar os retângulos sobre as calhas de forma a que o fio intersete a diagonal de cada retângulo da forma sugerida na figura seguinte:

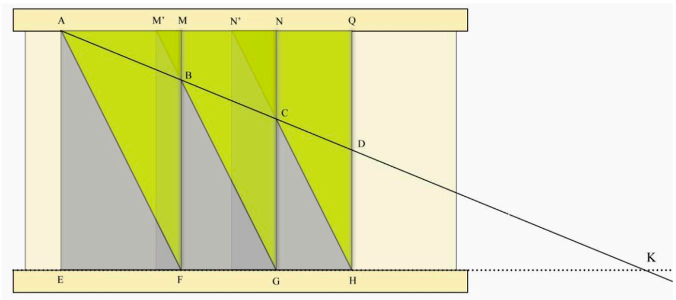


Fig.83: Mesolábio a ser utilizado
Fonte: Urreiztieta (2013)

Este processo vai sendo construído interativamente. Cada movimentação de um retângulo produz alterações no outro, pelo que por vezes é um processo um pouco moroso, principalmente se forem utilizados muitos retângulos.

De seguida serão apresentadas duas demonstrações de que $\overline{BF}$ e $\overline{CG}$ são as médias proporcionais entre $\overline{AE}$ e $\overline{DH}$.

A primeira demonstração é da autoria de Heath (1931), e foi baseada na versão de Erastótenes, já a segunda demonstração é feita recorrendo à semelhança de triângulos.

Demonstração 1

Considere-se que a estrutura do mesolábio é formada pelas retas paralelas AX e EY. A posição inicial dos retângulos é a apresentada no esquema seguinte, onde se podem observar os triângulos retângulos [AMF], [MNG] e [NQY], todos congruentes e de lados correspondentes paralelos.

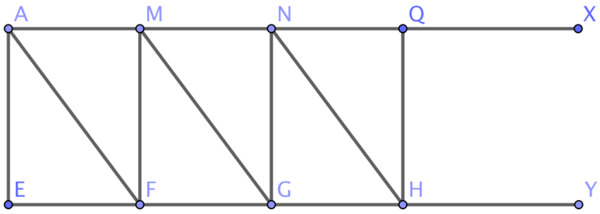


Fig.84: Mesolábio na sua forma inicial

É colocado um fio preso no ponto A, que se fixa num ponto da reta EY, seja K esse ponto. De seguida move-se o segundo retângulo, de forma a que a hipotenusa do triângulo [MNG] intersete o cateto maior do triângulo [AMF] no mesmo ponto em que o fio o interseta, obtendo o ponto B, como se pode observar na figura 85. Procede-se da mesma forma com o terceiro retângulo para encontrar o ponto C.

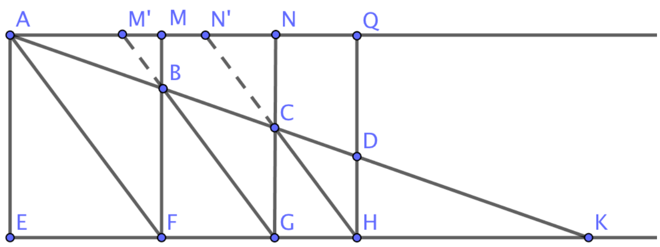


Fig.85: Mesolábio na sua forma final

As retas AD e EY intersetam-se no ponto K.

Uma vez que as retas AE e BF são paralelas, o Teorema de Tales permite escrever:

$$\frac{\overline{EK}}{\overline{KF}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \tag{6}$$

Atendendo a que aos triângulos [AFK] e [BGK] são triângulos semelhantes (uma vez que AF e BG são paralelas) tem-se:

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{FK}}{\overline{GK}} \tag{7}$$

As proporções (6) e (7) permitem escrever a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{EK}}{\overline{KF}} = \frac{\overline{KF}}{\overline{KG}} \tag{8}$$

Uma vez que os triângulos [AEK], [BFK] e [CGK] são semelhantes, podem escrever-se as seguintes proporções:

$$\frac{\overline{EK}}{\overline{KF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} \tag{9}$$

e

$$\frac{\overline{FK}}{\overline{KG}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} \tag{10}$$

Utilizando as proporções (8), (9) e (10) obtém-se a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} \tag{11}$$

Aplicando o mesmo raciocínio aos triângulos [BFK], [CGK] e [DHK] obtém-se a proporção:

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{DH}} \tag{12}$$

Utilizando as proporções (11) e (12) pode escrever-se:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{DH}} \tag{13}$$

Pode então dizer-se que $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}, \overline{DH}$ estão em proporção contínua (uma vez que os meios, nas proporções anteriores, são iguais) e portanto $\overline{BF}$ e $\overline{CG}$ são as médias proporcionais entre $\overline{AE}$ e $\overline{DH}$.

Demonstração 2

Esta demonstração baseia-se na semelhança de triângulos.

Uma vez que as retas AE, BF, CG e DH são paralelas, assim como as retas AF, BG e CH, pode afirmar-se que os triângulos [AEF], [BFG] e [CGH] são semelhantes.

Atendendo a esta semelhança podem escrever-se as seguintes proporções:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BG}} \tag{14}$$

e

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{CH}} \tag{15}$$

Como os triângulos [AFB], [BGC] e [CHD] também são semelhantes, pode escrever-se:

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BG}} \tag{16}$$

e

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{CH}} \tag{17}$$

Conjugando as proporções (14) e (16) obtém-se:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} \tag{18}$$

As proporções (15) e (17) permitem escrever a proporção:

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{DH}} \tag{19}$$

Conjugando as proporções (18) e (19) obtém-se:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{DH}}$$

Provou-se, desta forma, que $\overline{BF}$ e $\overline{CG}$ são as duas médias proporcionais entre $\overline{AE}$ e $\overline{DH}$.

Analise-se, agora, o caso particular em que $\overline{AE} = 2\overline{DH}$.

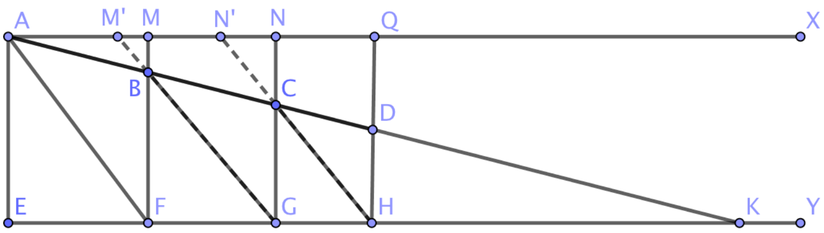


Fig.86: Mesolábio na sua forma final

Designe-se por m o valor da razão $\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}}$. Neste caso tem-se $\overline{BF} = \frac{\overline{AE}}{m}$

Uma vez que $\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = m$, tem-se $\overline{CG} = \frac{\overline{BF}}{m}$

Conjugando estas duas igualdades tem-se $\overline{CG} = \frac{\frac{\overline{AE}}{m}}{m} \Leftrightarrow \overline{CG} = \frac{\overline{AE}}{m^2}$ (20)

A igualdade (13) permite também afirmar que

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{DH}} = m \Leftrightarrow \overline{DH} = \frac{\overline{CG}}{m} \Leftrightarrow \overline{DH} = \frac{\frac{\overline{AE}}{m^2}}{m} \Leftrightarrow \overline{DH} = \frac{\overline{AE}}{m^3}$$

Uma vez que $\overline{AE} = 2\overline{DH}$ pode escrever-se

$$\overline{DH} = \frac{2\overline{DH}}{m^3} \Leftrightarrow m^3 = 2 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{2}$$

Musicalmente este caso é o que resulta na divisão da oitava em três terceiras Maiores. A nota mais grave corresponde ao segmento $[AE]$ (comprimento c), a nota que se encontra uma terceira acima corresponde ao segmento $[BF]$, a nota que se encontra uma quinta aumentada, em relação à nota mais grave, corresponde ao segmento $[CG]$ e $[DH]$ corresponde à oitava acima (comprimento $\frac{1}{2}c$). Sendo a primeira nota (primeiro segmento) o Dó, o segundo segmento corresponde a Mi, o terceiro a Sol# e o último a Si##[Dó].

Antes de prosseguir importa analisar o conceito de acidente musical. Um acidente musical é um símbolo que se utiliza para modificar a altura de uma nota. Existem vários acidentes musicais, no entanto apenas serão referidos dois deles nesta dissertação. O símbolo de sustenido, $\sharp$, ao ser colocado antes de uma nota faz com que esta seja aumentada de meio tom, ou seja, torna-se meio tom mais aguda, em relação à nota original. Se for colocado, antes da nota, o símbolo de bemol, $\flat$, faz com que esta fique meio tom mais grave. Num sistema de temperamento igual várias notas ficam iguais, como por exemplo:

Dó# = Ré$\flat$, Ré# = Mi$\flat$ e Mi# = Fá.

Tal como refere Urreiztieta (2013), este raciocínio pode ser extrapolado para um número maior de retângulos, demonstrando que se dois segmentos estiverem em proporção $\frac{a}{b}$, e se pretender determinar n (número de razões) médias geometricamente proporcionais, a proporção m (valor de cada razão) é a n-ésima raiz de $\frac{a}{b}$. Esta extrapolação será realizada na atividade prática número três.

3.4.6. A escala cromática

O sistema cromático possibilita a divisão do intervalo de oitava em doze partes iguais. Este sistema começou a ser desenvolvido por um matemático flamengo, Simon Steven (1548-1620), no final do século XVI, que dividiu a oitava em doze partes iguais de forma muito satisfatória, ver, por exemplo, Rodrigues (1999). Porém, como estava muito dependente do conceito de irracionalidade numérica, este sistema só foi devidamente fundamentado em 1691 por Andreas Werkmeister (1645-1706).

A introdução generalizada deste sistema, na prática musical, deu-se no início do século XVIII, por intermédio do compositor Johann Sebastián Bach (1685-1750). Para convencer os sentidos de que a proposta de Werkmeister era viável e não comprometia, de forma nenhuma, a qualidade e a beleza da música, Bach compôs uma obra, “O cravo bem temperado”, onde apresenta as doze tonalidades, no modo maior e no modo menor, pressupondo um temperamento igual para todas, Nougué (2011).

As doze notas da escala cromática podem-se denotar por:

Dó - Dó♯ - Ré - Ré♯ - Mi - Fá - Fá♯ - Sol - Sol♯ - Lá - Lá♯ -Si - Dó

No piano estas doze notas correspondem à série de sete teclas brancas e cinco teclas pretas. Como se pode observar no esquema das doze notas, na escala cromática intercalam-se notas, as que contêm o símbolo ♯, entre as notas que distam entre si do chamado intervalo de um tom, ou seja, entre o Dó e o Ré, entre Ré e Mi, entre Fá e Sol, entre Sol e Lá e entre Lá e Si. O mesmo não acontece entre Si e Dó, bem como entre Mi e Fá, uma vez que a distância entre estas notas é de meio tom. Ao introduzir esta relação entre as notas, conseguiu-se que todos os sons sucessivos na escala cromática estivessem separados sempre pela mesma distância, a distância de meio tom (temperado), ou seja, entre duas notas existe sempre o mesmo intervalo.

Na escala cromática as frequências f_n e f_{n+1} de duas notas sucessivas verificam a seguinte relação:

$$f_{n+1} = f_n \times k \text{ onde } n = 0, 1, 2, \dots, 12 \qquad (21)$$

Para que a razão entre as doze notas sucessivas da oitava seja sempre igual

$$k^{12} = 2 \Rightarrow k = \sqrt[12]{2}$$

Este valor de k, $\sqrt[12]{2} \approx$1,05946, permite obter uma oitava perfeita a partir de 12 meios tons. Desta forma o "coma pitagórico" fica igualmente distribuído por todas as notas da escala.

Partindo da relação (21) tem-se:

$$f_1 = f_0 \times k$$
$$f_2 = f_1 \times k = f_0 \times k \times k = f_0 \times k^2$$
$$f_3 = f_2 \times k = f_0 \times k^3$$
$$\dots$$
$$f_m = f_0 \times k^m \text{ onde } m = 0, 1, 2, \dots \qquad (22)$$

Através da expressão (22) pode calcular-se a frequência de qualquer nota da escala cromática.

3.4.7. Cents

O cent é uma unidade de medida logarítmica usada para medir com precisão absoluta intervalos de frequência muito pequenos. Esta unidade resulta da divisão de cada meio tom em 100 micro intervalos iguais (multiplicativos).

Uma vez que doze meios tons perfazem uma oitava, um cent é um valor tal que $(c^{100})^{12} = 2 \Rightarrow c = \sqrt[1200]{2}$

Esta nova medida permite comparar a extensão dos intervalos nos diferentes temperamentos. Uma vez que se trata de uma medida logarítmica, estes valores encadeiam-se através de somas, o que faz com que seja mais fácil realizar cálculos.

Dado um certo intervalo entre duas frequências, $\frac{f_1}{f_2}$, o seu valor em cents calcula-se da seguinte forma:

$$1200 \times log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$$

Recorrendo a esta fórmula de conversão é possível recalcular todos os intervalos e expressá-los em cents, o que torna mais fácil a comparação entre as diferentes escalas, como se pode observar na tabela 17.

		Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
Escala Pitagórica	Razão de frequências	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
	Cents	-----	203,91	407,82	498,04	701,95	905,86	1109,77	1200
Escala Diatónica	Razão de frequências	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
	Cents	-----	203,91	386,31	498,04	701,95	884,35	1088,26	1200
Escala Cromática	Razão de frequências	1	$\sqrt[12]{2^2}$	$\sqrt[12]{2^4}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[12]{2^9}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	2
	Cents	-----	200	400	500	700	900	1100	1200

Tabela 18: Tabela de razões de frequências intervalares (relativos ao Dó mais grave) para as escalas Pitagórica, Diatónica e Cromática

3.5. Atividades práticas

Neste capítulo estão incluídas sete atividades, a saber:

1 – Frações e figuras musicais;

2 – Construção de um relógio musical;

3 – Zarlino e o mesolábio;

4 – Mesolábio e as escalas de tons inteiros e cromática;

5 – Alguns cálculos matemáticos a partir de uma partitura;

6 – Aritmética na música;

7 – Progressões na música.

As duas primeiras atividades podem ser aplicadas em qualquer ano dos segundo e terceiro ciclo de escolaridade. As atividades três e quatro podem ser aplicadas a alunos do terceiro ciclo e as restantes a alunos do ensino secundário.

Na atividade 1 pretende-se que os alunos apliquem a adição de números racionais às figuras musicais.

Na segunda atividade é proposto aos alunos que construam um "relógio musical", no qual relacionam os tempos das figuras com o respetivo número natural.

Nas terceira e quarta atividades pretende-se que os alunos travem conhecimento com um instrumento antigo, o mesolábio, e que, a partir deste efetuem diversos cálculos entre as medidas de comprimentos que se encontram em proporção. É também interessante a abordagem que é realizada, da utilização deste instrumento para determinar as posições dos trastres de uma viola portuguesa.

Na quinta atividade são propostos diversos cálculos aritméticos, ligados a conceitos musicais.

Por fim, na sétima e última atividade, pretende-se que os alunos relacionem as progressões com as frequências das notas na escala cromática.

Atividade 1 - Frações e figuras musicais

É possível fazer cálculos matemáticos com figuras musicais?

Quanto dura uma semínima, se comparada à duração de uma semibreve?

Uma semibreve tem a duração de duas mínimas, ou seja, cada mínima tem metade da duração da semibreve, simbolicamente:

𝅗𝅥 + 𝅗𝅥 = $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$

1. Efetue as seguintes operações, tendo em conta o exemplo apresentado.

1.1. 𝅗𝅥 + ♩ =

1.2. ♩ + 𝅗𝅥 =

1.3. 𝅗𝅥 + 𝅝 =

1.4. ♩ + 𝅝 =

1.5. 𝅗𝅥 + ♪ =

1.6. 𝅗𝅥 + 𝅗𝅥 =

1.7. ♩ + ♪ =

1.8. (♩ + ♫) + 𝅗𝅥 =

1.9. ♩ + (♫ + 𝅗𝅥) =

2.

2.1. Qual é a propriedade da adição de números racionais que se pode observar nas alíneas 1.1. e 1.2.?

2.2. E nas alíneas 1.8. e 1.9.?

Atividade 2 - Construção de um relógio musical

Para a realização desta atividade são necessários os seguintes materiais: uma folha de cartolina ou cartão, compasso e uma folha com figuras musicais impressas.

Para a construção do relógio musical os alunos deverão seguir as seguintes instruções:

- Desenhar um círculo de raio 10 cm na folha de carolina;
- Dividir a circunferência em doze partes iguais;
- Escrever os números no relógio;
- Após escrever os números no relógio é necessário pensar, para cada número/hora, nas figuras que se podem utilizar para perfazer o número de tempos da hora desejada. Por exemplo, junto ao número dois (duas horas) podem colocar-se as seguintes figuras: ♩♩ ou 𝅗𝅥 .

Esta atividade foi desenvolvida no ano letivo de 2015/2016 com os alunos da turma G do sétimo ano, da Escola Secundária da Gafanha da Nazaré. Apresentam-se, em baixo, algumas imagens que retratam o trabalho desenvolvido.

Fig.87: Fotografias tiradas durante o decorrer da atividade

Nota: esta atividade foi adaptada de "Make a music clock", Hill (2014)

Atividade 3 - Zarlino e o mesolábio

1. Utilizando o mesolábio com dois retângulos, pretende-se determinar a média geométrica entre o comprimento de dois segmentos, $\overline{AD}\ e\ \overline{CF}$, no caso em que $\overline{AD} = 2\overline{CF}$ (ver figura 88). Este procedimento permite dividir o intervalo de oitava em duas partes iguais, ou seja, em dois intervalos de quarta aumentada.

Após movimentar o segundo retângulo de forma a que $\overline{AD} = 2\overline{CF}$, o mesolábio fica com o seguinte aspeto:

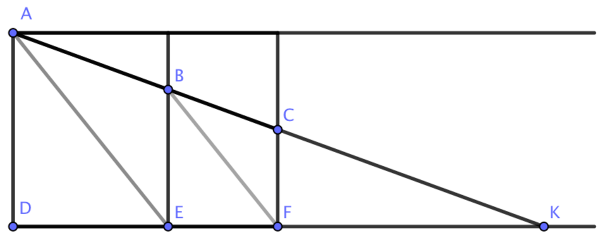


Fig.88: Mesolábio com dois retângulos na sua posição final

1.1. Os triângulos [AED] e [BFE] são semelhantes. Justifique esta afirmação.

1.2. Atendendo a esta semelhança de triângulos estabeleça uma proporção entre os catetos maiores e as hipotenusas dos triângulos.

1.3. Considere agora os triângulos [ABE] e [BCF]. Estes triângulos são semelhantes? Justifique.

1.4. Estabeleça uma proporção entre os lados $[AE]$, $[BE]$, $[BF]$ e $[CF]$.

1.5. Recorrendo às duas proporções elaboradas anteriormente conclua que $\overline{BE}$ é a média proporcional entra $\overline{AD}$ e $\overline{CF}$, ou seja, que $\frac{\overline{AD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$.

1.6. Qual será o valor destas duas razões? Designe as razões $\frac{\overline{AD}}{\overline{BE}}$ e $\frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$ por m.

Tendo em conta que $\overline{AD} = 2\overline{CF}$, determine o valor de m.

2. Considere agora que o mesolábio tem mais um retângulo, mantendo-se a relação de comprimentos $\left(\frac{1}{2}\right)$ entre o primeiro e o último segmentos.

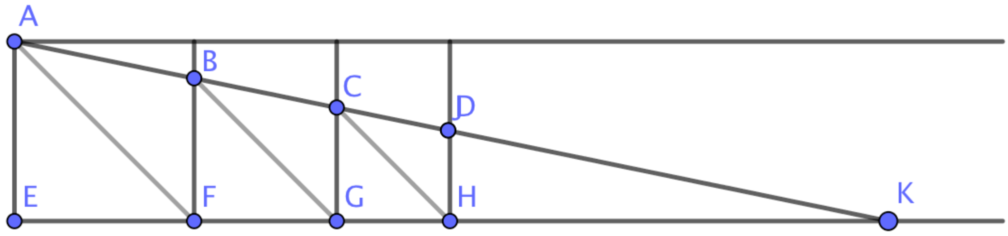


Fig.89: Mesolábio com três retângulos na sua posição final

2.1. Estabeleça as proporções entre os lados dos triângulos, de forma semelhante à do exercício anterior.

2.2. Através dessas proporções justifique que $\overline{BF}$ e $\overline{CG}$ são as médias proporcionais entre $\overline{AE}$ e $\overline{DH}$.

2.3. Determine o valor de $\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{BG}}{DH}$

3. Observe agora o mesolábio com quatro retângulos e a mesma relação de ½ entre os segmentos extremos, na sua posição final.

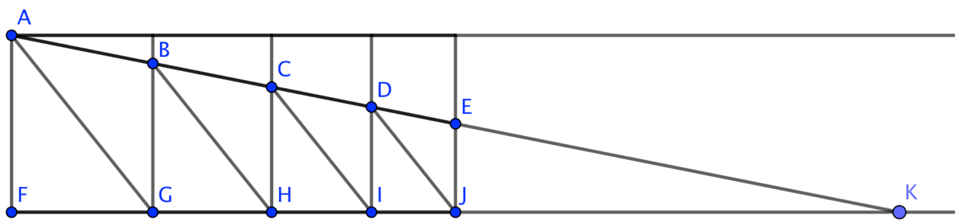


Fig.90: Mesolábio com quatro retângulos na sua posição final

Determine o valor das razões que podem ser estabelecidas entre os vários segmentos verticais.

4. Qual acha que é o valor da razão m quando considerados n segmentos e mantendo-se a relação de ½ entre os comprimentos dos segmentos dos extremos?

Atividade 4- Mesolábio e as escalas de tons inteiros e cromática

O mesolábio pode ser utilizado para dividir, de forma mecânica, um intervalo em partes iguais.

Utilizando este instrumento pretende-se dividir a oitava em seis e depois em doze intervalos iguais.

1. Ao dividir a oitava em seis partes obtém-se a chamada escala de tons inteiros. Para tal considere-se o mesolábio com seis retângulos.

Considere que O é o ponto médio do segmento $[GN]$. Após o deslizamento dos retângulos sobre a calha obtém-se o seguinte.

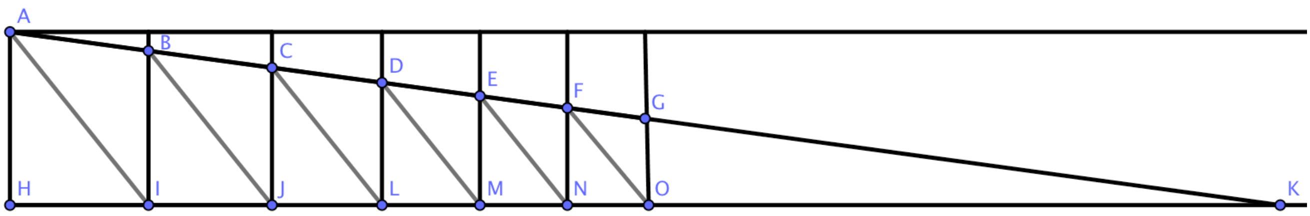


Fig.91: Mesolábio com seis retângulos na sua forma final

1.1. Escreva as proporções que permitem determinar as cinco médias proporcionais.

1.2. Qual é o valor de cada uma destas razões?

1.3. Determine o valor de cada uma das médias proporcionais b, c, d, e e f.

Desta forma a oitava ficou dividida em seis partes, obtendo-se assim a escala de tons inteiros.

2. Quando se divide a oitava em doze partes obtém-se a escala cromática. É através desta escala que se divide o braço de uma guitarra através de trastes.

O mesolábio pode ser muito útil para este processo.

Observe a imagem seguinte sobre a construção de uma viola portuguesa.

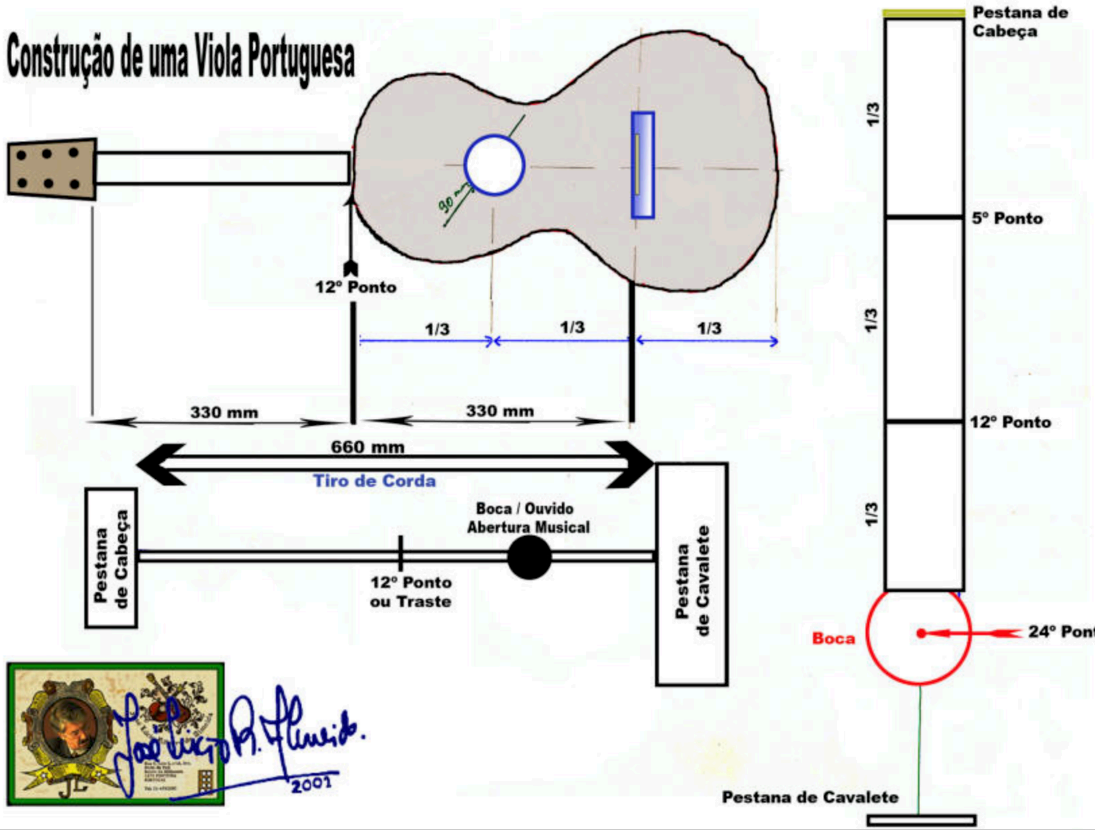


Fig.92: Dados de uma viola portuguesa

Fonte: http://www.jose-lucio.com/MEDIDAS/Medidas.htm

Na construção da viola portuguesa, cujo exemplo se mostra, há alguns aspetos a considerar antes de prosseguir. Segundo Almeida (2012), o tiro de corda representa a distância entre os dois apoios das cordas soltas, a pestana de cabeça e a pestana de cavalete. A distância da pestana de cabeça ao décimo segundo traste é igual à distância do décimo segundo traste à pestana de cavalete. Verifica-se assim que o intervalo produzido ao pressionar o 12º traste é o intervalo de oitava (metade do comprimento da corda) e corresponde a 12 meios tons (doze trastes).

Pretende-se, utilizando o mesolábio, fazer a divisão da oitava em doze partes, para depois poder transpor as medidas obtidas para o braço da viola. Uma vez que o tiro de corda tem 660 mm, e o braço 330 mm, é necessário construir um mesolábio com 660 mm de altura (para ter o mesmo valor do tiro de corda) e 1250 mm (este valor obtém-se mantendo-se a proporção entre as medidas do mesolábio de Zarlino, aproximadamente 380 mm por 720 mm) do comprimento. Neste mesolábio vão ser colocados doze retângulos iguais, com 660 mm de comprimento e 400 mm de largura (Zarlino por vezes utilizou quadrados e outras vezes retângulos, mas neste caso não há referência às suas dimensões, 400 é um valor possível para esta experiência). Como se pretende dividir a oitava, o fio que se prende no canto superior esquerdo do primeiro retângulo tem de passar pelo ponto médio do lado direito do último retângulo. Os retângulos têm de ser colocados de forma a que este fio intersete cada uma das diagonais destes. Após algum trabalho obtém-se o seguinte:

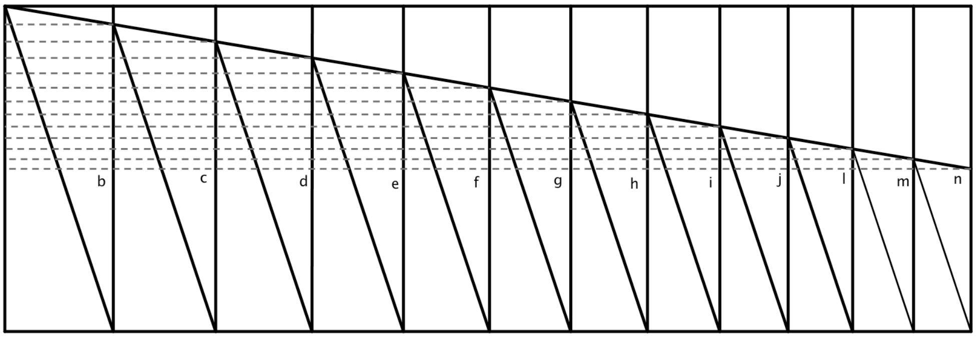


Fig.93: Mesolábio com 12 retângulos na sua forma final

Para poder "transpor" as medidas obtidas (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, m e n), coloca-se o extremo superior esquerdo coincidente com a pestana da cabeça e o extremo inferior esquerdo coincidente com a pestana do cavalete.

2.1. Escreva as proporções que permitem determinar as onze médias proporcionais.

2.2. Qual é o valor de cada uma das razões escritas?

2.3. Determine os valores das diferentes médias proporcionais.

Atividade 5 - Alguns cálculos matemáticos a partir de uma partitura

Numa partitura podem observar-se diversos números e símbolos. Qual será o seu significado?

- Compasso: O compasso é formado por dois números, sendo utilizado para para dividir a música em intervalos de tempo iguais. O número de cima indica o número de tempos que o compõe e o de baixo indica qual a figura que ocupa cada tempo.
- Andamento: o andamento expressa a “velocidade” de execução de uma obra. O andamento é expresso através de nomes italianos, e serve para dar uma indicação do número de pulsações por minuto, como se pode observar na tabela seguinte:

Nome	Pulsações/min
Largo	Até 50
Larghetto	50-66
Adagio	66-76
Andante	76-108
Moderato	108-120
Allegro	120-168
Presto	168-200
Prestissimo	200-207

Tabela 19: Andamentos e nomes

Atualmente o andamento é expresso de forma mais precisa, indicando o número de notas por minuto. Por exemplo, ♩=90 significa que num minuto devem executar-se 90 semínimas.

Uma vez estabelecida a duração de uma figura, tudo o resto é também conhecido em função desse valor.

Considere-se o seguinte exemplo de um excerto de uma partitura:

Fig. 94: Excerto de uma partitura

Fonte: Carrión & Llopis (2008)

A fórmula de compasso $\frac{2}{4}$ significa que, em cada compasso, cabem tempos equivalentes a duas semínimas.

O excerto apresentado tem cinco compassos. Como determinar a sua duração total?

5 compassos $\times$ 2 semínimas $\times \frac{1}{70}$ minutos = $\frac{10}{70}$ minutos $\approx$ 8,6 segundos

Atividade prática

1. Calcule quanto tempo dura uma semibreve, uma mínima e uma fusa, para um determinado andamento, 100 pulsações por minuto, e supondo que a pulsação se refere sempre a semínimas.

2. Determine, em segundos, a duração da seguinte canção de David Bowie, se for cumprido o andamento indicado.

Fig.95: Partitura Life on Mars

Fonte: www.musescore

Nota: esta atividade foi adaptada de “Música y Matemáticas, La armonía de los números”, Carrión & Llopis (2008).

Atividade 6 - Aritmética na música

1. Intervalos

Um intervalo pode ser definido como a diferença/distância existente entre as alturas de duas notas. Será que a diferença aritmética das frequências corresponde realmente ao intervalo musical?

Considerem-se as frequências das notas $Dó_4$, $Dó_5$ e $Dó_6$ à distância de uma oitava perfeita entre elas: $f(Dó_4)$=261,63Hz; $f(Dó_5)$=523,25Hz e $f(Dó_6)$=1046,50Hz.

Calcule a diferença entre as frequências:

$f(Dó_5)$- $f(Dó_4)$ = $f(Dó_6)$- $f(Dó_5)$=

Como pode constatar estas diferenças não são iguais, o que contraria o facto de os intervalos considerados, oitava perfeita, serem iguais.

Como calcular então estes intervalos a partir das frequências das notas?

Efetue os seguintes quocientes:

$f(Dó_5) \div f(Dó_4)$ = $f(Dó_6) \div f(Dó_5)$ =

Pode então concluir-se que, apesar de musicalmente se designar de intervalo a diferença entre a altura de duas notas, esta diferença não se traduz pela diferença aritmética das frequências, mas sim pelo quociente entre elas.

Assim, pode definir-se intervalo entre duas notas, n_1 e n_2 da seguinte forma:

$int(n_1, n_2) = \frac{f(n_2)}{f(n_1)}$

2. "Soma" de intervalos

Considerem-se os valores (aproximados) das frequências das notas da escala temperada:

Nota	Frequência	Nota	Frequência
$Dó_4$	261,63	$Fá_4$#	369,99
$Dó_4$#	277,18	Sol_4	391,99
$Ré_4$	293,66	Sol_4#	415,30
$Mi_4 b$	311,13	$Lá_4$	440
Mi_4	329,63	$Si_4 b$	466,16
$Fá_4$	349,23	Si_4	493,88

Tabela 20: Frequências de notas dentro de uma oitava, na escala temperada

Musicalmente a "soma" (junção) dos intervalos de terceira Dó a Mi com Mi a Sol corresponde ao intervalo de quinta de Dó a Sol. Matematicamente também será assim?

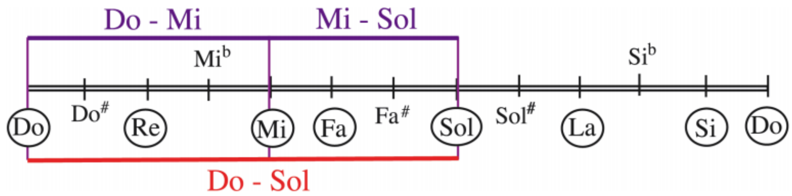


Fig.96: Junção de dois intervalos

Fonte: Carrión & Llopis (2008)

Para verificar se assim é efetue os cálculos seguintes:

$\text{int}(Dó_4, Mi_4) =$ $\text{int}(Mi_4, Sol_4) =$ $\text{int}(Dó_4, Sol_4) =$

$$\text{int}(Dó_4, Mi_4) + \text{int}(Mi_4, Sol_4) =$$

Efetuando estes cálculos verifica-se que a "soma" dos dois intervalos não corresponde à soma aritmética das respetivas relações de frequência.

Como se pode então obter o intervalo de quinta, $\text{int}(Dó_4, Sol_4)$, a partir das duas terceiras consideradas, $\text{int}(Dó_4, Mi_4)$ e $\text{int}(Mi_4, Sol_4)$?

Na verdade, a junção de dois intervalos corresponde ao produto das razões de frequências dos mesmos.

A tabela seguinte apresenta as operações matemáticas entre intervalos quando traduzidos através de relações de frequências.

Sejam n_1, n_2 e n_3 três notas de frequências f_1, f_2 e f_3 não nulas, ordenadas de forma crescente.

"Soma" de intervalos	"Diferença" de intervalos
$int(n_1, n_2) \oplus int(n_2, n_3) =$ $= int(n_1, n_2) \times int(n_2, n_3) = \frac{f_3}{f_1}$	$int(n_1, n_3) \ominus int(n_2, n_3) =$ $= int(n_1, n_3) \div int(n_2, n_3) = \frac{f_2}{f_1}$
"Multiplicação" de p intervalos iguais	"Divisão" em q partes iguais
$int(n_1, n_2) \otimes p = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^p$	$int(n_1, n_2) \oslash q = \sqrt[q]{\frac{f_2}{f_1}}$

Tabela 21: Operações matemáticas entre intervalos

Adaptado de: Carrión & Llopis (2008), "Música y Matemáticas, La armonía de los números"

2.1. Considerando as frequências das notas da escala cromática da tabela apresentada em cima, e a tabela de operações dada, calcule o valor de cada um dos intervalos:

2.1.1. $int(Dó_4, Dó_4\#) \oplus int(Dó_4\#, Mi_4)$

2.1.2. $int(Dó_4, Mi_4) \ominus int(Ré_4, Mi_4)$

2.1.3. $[int(Fá_4, Sol_4\#)] \otimes 3$

Indique duas notas que estejam à distância deste intervalo, ou seja, à distância de um intervalo de quarta aumentada.

2.1.4. $[int(Dó_4, Fá_4\#)] \oslash 3$

Indique duas notas que estejam à distância deste intervalo, ou seja, à distância de um intervalo de segunda Maior.

2.2. Partindo do intervalo de oitava, calcule a razão de frequências que corresponde a uma segunda Maior. Note que o intervalo de segunda Maior pode ser obtido fazendo a divisão da oitava em seis partes iguais. Ao fazer a divisão da oitava em seis partes iguais obtém-se uma escala de seis notas, a chamada escala de tons inteiros, ou hexafónica.

3. O ouvido humano perceciona os intervalos sonoros através de uma escala logarítmica e não de forma linear. Por essa razão, a soma de intervalos não se traduz numa soma algébrica das relações de frequências envolvidas mas sim no produto das mesmas, ou seja, na soma dos logaritmos das mesmas.

Considerem-se os intervalos de segunda Maior, Dó$_4$ a Ré$_4$ e Ré$_4$ a Mi$_4$.

Calcule as respetivas relações de frequências, verificando que são iguais:

$int(Dó_4, Ré_4)$ $\qquad\qquad\qquad$ $int(Ré_4, Mi_4)$

Calcule agora o valor da relação de frequências do intervalo de terceira Maior, Dó$_4$ a Mi$_4$, $int(Dó_4, Mi_4)$.

Recorrendo às operações com logaritmos, calcule a soma dos logaritmos dos dois intervalos iniciais e verifique que obtém o terceiro. Ou seja, logaritmicamente, a soma dos dois intervalos de segunda Maior é igual ao intervalo de terceira Maior.

$$\log(int(Dó_4, Ré_4)) + \log\big(\mathrm{int}(Ré_4, Mi_4)\big) = \log\,(\mathrm{int}(Dó_4, Mi_4))$$

Ao contrário do que acontece nas relações de frequências da “soma” de dois intervalos, que se traduz num produto, no caso da relação entre os logaritmos das razões de frequências dos intervalos é realizada efetivamente uma soma. Isto acontece devido às propriedades desta função.

4. Serão as designações usuais dos intervalos as mais adequadas do ponto de vista matemático?

Ao juntar dois intervalos de segunda obtemos uma terceira, e ao juntar um intervalo de segunda com um de terceira obtemos uma quarta. Tendo em conta os numerais envolvidos era de esperar obter uma quarta quando se juntam duas segundas (2+2=4) e uma quinta quando se junta uma segunda com uma terceira (2+3=5), mas não é isso que acontece. Este problema surge em todas justaposições de intervalos que se considerarem.

A designação de um intervalo musical é um numeral ordinal que se relaciona com a distância entre as duas notas que o formam: contam-se o número de notas musicais que existem entre as duas notas envolvidas, incluindo estas duas. Esta forma de classificar intervalos faz com que a sua "soma" (junção) se torne uma operação contra-intuitiva, como se exemplificou. No entanto é possível "corrigir" estas contagens de modo a que a "soma" já bata certo. Para tal considere-se uma função v, de domínio $\{numerais\ ordinais\}$ e contradomínio $\mathbb{N}$, que à designação do intervalo faz corresponder o numeral respetivo, subtraído de uma unidade, ou seja, $v(x) = x - 1$, por exemplo $v(3^{\underline{a}}) = 3 - 1 = 2$. Note-se que ao utilizar esta função se está a cometer um certo abuso de linguagem.

4.1. Verifique que a função é invertível.

4.2. Verifique, recorrendo à função v, que, de facto, a junção de duas terceiras é uma quinta e que a junção de duas quartas é uma sétima, entre outros.

4.3. Verifique que a sobreposição de três terceiras é uma sétima.

4.4. Dados dois intervalos i_1 e i_2 , defina a operação "soma" de intervalos, ‡, a partir da função v, de modo a obter o intervalo resultante da junção dos mesmos.

$$i_1 \ddagger i_2 =$$

Utilize a operação ‡ para verificar que a junção de uma 3ª com uma 4ª é uma 6ª, ou seja, 3ª‡4ª=6ª.

Atividade 7 - Progressões na música

Considerem-se as notas da escala cromática a começar em Lá.

Lá - Lá♯ - Si - Dó - Dó♯ - Ré - Ré♯ - Mi - Fá - Fá♯ - Sol - Sol♯ - Lá

1. Sabendo que a frequência do primeiro Lá desta escala, o $Lá_3$, é 220Hz, como é possível determinar as frequências das restantes notas (da esquerda para a direita), usando um temperamento igual?

1.1. Descreva o procedimento necessário para obter as sucessivas frequências.

1. 2. Os valores de frequência a que se refere a alínea anterior são os primeiros termos de uma progressão.

1.2.1. Considerando que o primeiro termo desta progressão é 220, e que o décimo terceiro é 440, determine a razão da progressão.

1.2.2. Escreva o termo geral desta progressão e preencha a tabela seguinte com as frequências das restantes notas da escala. Utilize valores aproximados com 1 c.d..

Nota	Lá	Lá#	Si	Dó	Dó#	Ré	Ré#	Mi	Fá	Fá#	Sol	Sol#	Lá
Frequência	220												440

Tabela 22: Tabela de frequências

2. As frequências dos sons na escala cromática variam, como se constatou, de acordo com uma progressão geométrica de razão $2^{1/12}$. No entanto, o ouvido humano tem uma perceção logarítmica dos sons, pelo que esta escala pode também ser interpretada como uma sendo uma escala logarítmica de base 2. Na

tabela seguinte podem observar-se as razões entre as frequências das notas (relativamente à nota mais grave Dó), e o seu logaritmo.

	Razões entre frequências	Logaritmo das razões entre frequências
Dó	1	0
Dó#	$2^{\frac{1}{12}}$	$log_2 2^{1/12}$
Ré	$2^{\frac{2}{12}}$	$log_2 2^{2/12}$
Ré#	$2^{\frac{3}{12}}$	$log_2 2^{3/12}$
Mi	$2^{\frac{4}{12}}$	$log_2 2^{4/12}$
Fá	$2^{\frac{5}{12}}$	$log_2 2^{5/12}$
Fá#	$2^{\frac{6}{12}}$	$log_2 2^{6/12}$
Sol	$2^{\frac{7}{12}}$	$log_2 2^{7/12}$
Sol#	$2^{\frac{8}{12}}$	$log_2 2^{8/12}$
Lá	$2^{\frac{9}{12}}$	$log_2 2^{9/12}$
Lá#	$2^{\frac{10}{12}}$	$log_2 2^{10/12}$
Si	$2^{\frac{11}{12}}$	$log_2 2^{11/12}$
Dó	$2^{\frac{12}{12}}$	$log_2 2^{12/12}$

Tabela 23: Razões entre frequências das notas

2.1. Se se considerarem os logaritmos das razões de frequências tem-se também uma progressão geométrica? Que tipo de sucessão é que se obtém?

Capítulo 4 – Número de ouro, proporção áurea e música

O número de ouro e a proporção áurea fascinam o ser humano desde a antiguidade, encontrando-se em diversas situações do dia a dia, desde construções seculares à natureza que nos rodeia. A sua relação com a música não é tão conhecida, mas também existe, como se poderá observar neste capítulo.

4.1. Mozart e Beethoven

Como refere Aleph (2013), algumas composições de Mozart (1756-1791) e de Beethoven (1770-1827) atingem o momento de máxima tensão num ponto em que a obra está dividida em secções cujas extensões se encontram aproximadamente em proporção áurea.

O compositor austríaco Mozart, na sua Sonata nº1 para piano, subdivide o primeiro andamento em duas partes, uma com 38 compassos e a outra com 61. O quociente $\frac{61}{38}$ difere, em menos de uma centésima, da proporção áurea.

4.2. A proporção áurea na construção do violino

O primeiro violino, tal como conhecemos atualmente, foi criado, por volta do ano de 1550, por Gasparo Duiffopruggar (1514-1570), Baviera, Alemanha, considerado o pioneiro na fabricação do instrumento. ("A origem das coisas, a origem do violino", para.6)

Durante quase 200 anos a fabricação de violinos ficou, depois restrita a três famílias italianas: a família Amati, a Guarneri e a Stradivari.

Destes três fabricantes o mais famoso pela sua qualidade, foi o italiano António Stradivari (1644-1737). Na figura em baixo pode observar-se um pormenor de um dos seus violinos. Segundo Corbalán (2016), Stradivari desenhou os seus violinos a partir do número de ouro, tendo-o utilizado para calcular as distâncias entre os diferentes componentes, bem como a disposição das aberturas acústicas em relação ao corpo do violino.

Fig.97: Pormenor de um violino

Fonte: http://violinando.com/violinos-stradivarius/

Segundo o mesmo autor, Stradivari deu a cada pequeno detalhe um toque de refinamento, o que fez com que o seu trabalho fosse reverenciado por toda a Europa. O seu período áureo decorreu entre 1700 e 1724, durante o qual nasceram os seus melhores instrumentos.

A figura seguinte ilustra as proporções existentes num violino de Stradivari.

As medidas a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 e c_2 verificam as seguintes proporções:

$$\frac{a_1 + a_2}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_2}{c_2} = \frac{c_2}{c_1} = \emptyset$$

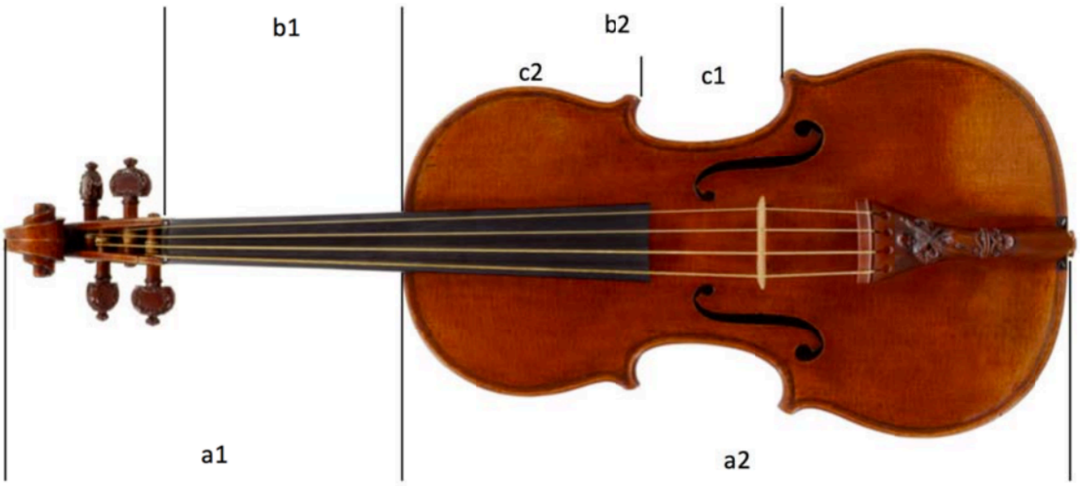


Fig.98: Esquema que ilustra as proporções presentes num violino

Fonte: http://nntdm.net/papers/nntdm-20/NNTDM-20-1-72-77.pdf

4.3. O número de ouro e a sequencia de Fibonacci para compor

Com base na proporção áurea pode-se definir aquilo que se quer compor, Aleph (2013). Por exemplo, se uma música tiver duração entre A min e B min, então é possível determinar o instante em que se deve modificar o ritmo, de forma a torna-la mais atrativa.

A composição deve, segundo a proporção áurea, ser dividida em duas partes, uma com duração de aproximadamente 61,8% do tempo total e outra com 38,2%.

Por exemplo, numa música que dure quatro minutos (240 segundos), deve ser introduzida uma alteração aos 2min e 28seg uma vez que 0,618x240=148,32 seg.

O compositor húngaro Béla Bartók (1881-1945), na sua peça musical "Música para instrumentos de Corda, Percussão e Celesta" (1936), utiliza, repetidamente, sucessões de Fibonacci. Nesta peça tudo é excecional, como descrevem Brigitte e Jean Massin.

> Cada um dos quatro movimentos da Música é uma obra-prima: o primeiro é uma das mais belas fugas da história da música; o segundo, de grande dinamismo, joga com a heterofonia dos diferentes grupos orquestrais; no terceiro movimento, Bartók encontra as sonoridades mais desorientadas: é aí que explora ao máximo os recursos das cordas, combinando-as de maneira inusitada com os timbres percurssivos; o caráter de festa do final afirma-se na melodia principal em modo antigo-modo de fá-ritmado à búlgara. (Massin e Massin, 1983, p. 644)

Esta obra foi elaborada para dois grupos de cordas completos, colocados em lados opostos do palco, e um grupo de percussão (xilofone, caixa, tímpanos, etc) que se encontra no centro. Acresce a estes a celesta, que se pode observar na figura seguinte, e também um piano. Todas as posições dos instrumentos são especificadas pelo autor na sua obra.

Fig.99: Imagem do instrumento Celesta
Fonte: http://www.todosinstrumentosmusicais.com.br/

Segundo Massin e Massin (1983), em toda a peça estão presentes números da sequência de Fibonacci. Bartók utiliza conscientemente a razão áurea para demarcar formalmente a sua obra: eventos importantes, como mudança de movimento, tonalidade, ritmo ou intensidade, todos acontecem em proporção áurea. A sensação ao ouvir a música é a de perfeição. Como descreve Solomon (1973), a obra é constituída por 89 compassos. Desses 89 compassos a obra divide-se em duas partes/secções principais, uma com 55 compassos e outra com 34. Estas secções voltam, por sua vez, a estar subdivididas de acordo com os números de Fibonacci: a primeira em 34 e 21 compassos e a segunda em 13 e 21. O terceiro andamento da mesma obra, um *adágio*, começa com uma progressão rítmica na qual o xilofone toca o mesmo fá em grupos de 1, 1, 2, 3, 5, 8, 5, 3, 2, 1 e 1 notas.

O esquema da figura 100 ilustra a divisão da obra.

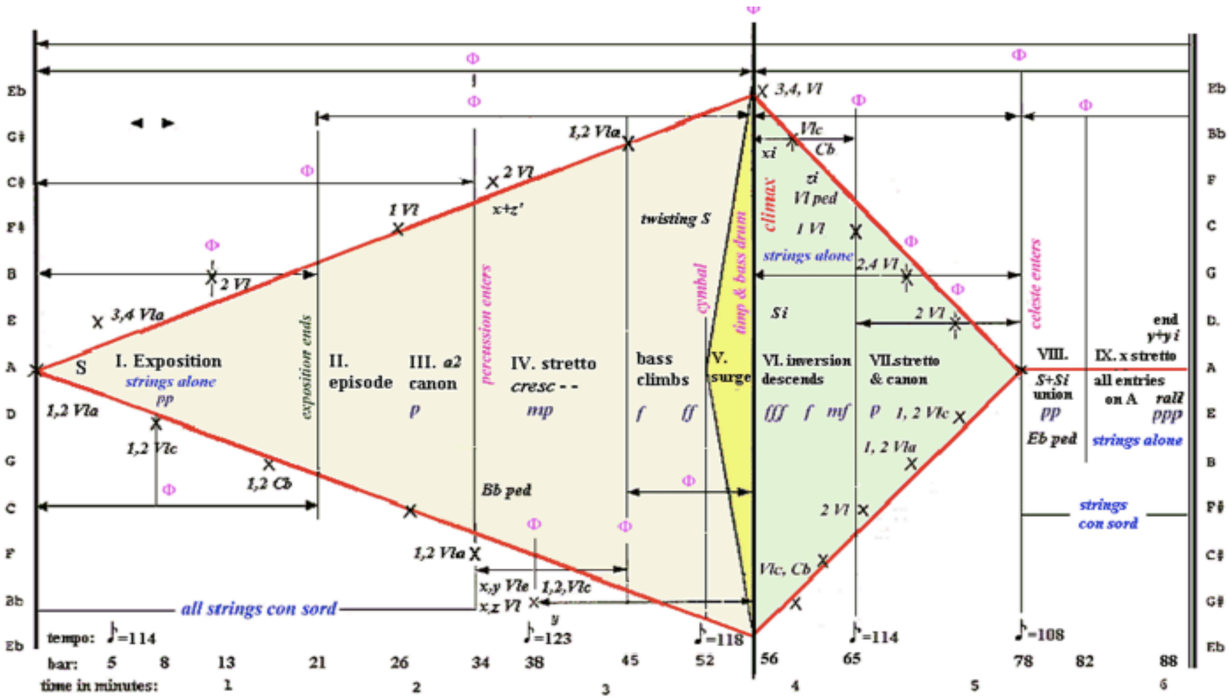


Fig.100: Gráfico da análise da obra “Música para instrumentos de corda, percussão e celesta”
Fonte: http://solomonsmusic.net/diss7.htm

4.4. Atividade práticas

Neste capítulo estão incluídas duas atividades, a saber:

1 – O violino e a proporção áurea;

2 – Os ritmos e os números de Fibonacci.

A primeira atividade pode ser aplicada em qualquer ano de escolaridade. A segunda só pode ser aplicada a alunos do décimo segundo ano de escolaridade.

Na primeira atividade pretende-se que os alunos averiguem se hoje em dia os violinos são construídos tendo em conta a proporção áurea, à semelhança dos violinos de Stradivari.

A segunda atividade visa a exploração de certas relações entre matemática e os tempos de algumas notas (mínimas e semínimas), passando pelos conceitos matemáticos de progressões, cálculo combinatório e triângulo de Pascal.

Atividade 1 – O violino e a proporção áurea

(Para a realização desta atividade o professor deverá levar para a sala de aula dois violinos de tamanhos ¼ e 4/4.)

Hoje em dia os violinos serão construídos tendo em conta a proporção áurea?

Para poder responder a esta pergunta comesse por fazer as medições sugeridas na figura, nos violinos que lhe são fornecidos. O violino mais pequeno designa-se por violino de ¼ e é um violino para crianças. O maior designa-se por 4/4 e é um violino de adulto.

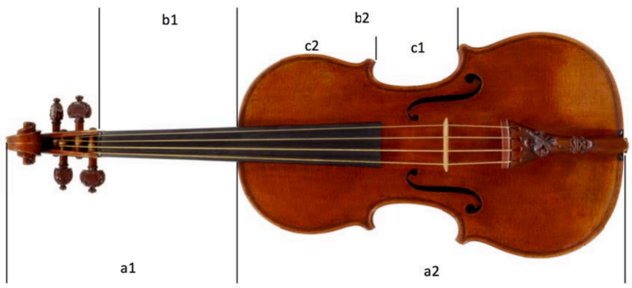


Fig.101: Imagem de um violino

Fonte: http://nntdm.net/papers/nntdm-20/NNTDM-20-1-72-77.pdf

	violino 1/4	violino 4/4
a_1		
a_2		
b_1		
b_2		
c_1		
c_2		

Tabela 24: Medidas dos violinos

Após efetuar as medições, o mais rigorosas possível, preencha a tabela seguinte. Utilize valores arredondados com cinco casas decimais.

	violino 1/4	violino 4/4
$\frac{a_1 + a_2}{a_2}$		
$\frac{a_2}{a_1}$		
$\frac{b_2}{b_1}$		
$\frac{b_2}{c_2}$		
$\frac{c_2}{c_1}$		

Tabela 25: Razões entre medidas

Estas razões aproximam-se do número de ouro?

Atividade 2 - Os ritmos e os números de Fibonacci

1. Utilizando apenas as figuras musicais de mínima e semínima (𝅗𝅥 , ♩) complete a tabela seguinte, com as diversas formas de perfazer os tempos indicados. As duas primeiras colunas já se encontram preenchidas.

	Nº de tempos					
	1	2	3	4	5	6
	♩	♩♩ 𝅗𝅥				
Nº total de combinações	1	2				

Tabela 26: Número de combinações possíveis, de acordo com determinado número de tempos

Ao completar esta tabela e, tendo em conta o número total de combinações que é possível fazer com as duas figuras musicais, observa-se a sucessão numérica: 1, 2, 3, 5, 8, 11, ...

2. Que tipo de sucessão é esta? Será aritmética?

Faz lembrar alguma sucessão de números conhecida?

Como continua esta sucessão?

3. Defina esta sucessão por recorrência. Consegue explicar esta relação de recorrência no contexto desta atividade?

4. Será possível escrever os termos desta sucessão através do cálculo combinatório?

Observe a tabela seguinte:

Termos da sucessão	Só um tipo de figura (nº de combinações)		Dois tipos de figuras	Total de combinações
	♩	𝅗𝅥	♩ 𝅗𝅥	
u_1	♩ (C_0^0=1)	-----	-----	1
u_2	♩♩ (C_0^2=1)	𝅗𝅥 ($C_1^1 = 1$)	-----	2
u_3	♩♩♩ (C_0^3=1)	-----	♩𝅗𝅥 ; 𝅗𝅥♩ ($C_1^2 = 2$)	3
u_4	♩♩♩♩ ($C_0^4 = 1$)	𝅗𝅥𝅗𝅥 (C_2^2=1)	♩♩𝅗𝅥 ($C_1^3 = 3$)	5
u_5	♩♩♩♩♩ (C_0^5=1)	-----	♩𝅗𝅥𝅗𝅥 ($3 = C_2^3$) ♩♩♩𝅗𝅥 ($4 = C_1^4$)	8
u_6	♩♩♩♩♩♩ (C_0^6=1)	𝅗𝅥𝅗𝅥𝅗𝅥 (C_3^3 =1)	♩♩𝅗𝅥𝅗𝅥 ($6 = C_2^4$) ♩♩♩♩𝅗𝅥 ($5 = C_1^5$)	13
u_7	♩♩♩♩♩♩♩ ($C_0^7 = 1$)	-----	♩𝅗𝅥𝅗𝅥𝅗𝅥 ($4 = C_3^4$) ♩♩♩𝅗𝅥𝅗𝅥 ($10 = C_2^5$) ♩♩♩♩♩𝅗𝅥 ($6 = C_1^6$)	21

Tabela 27: Número de combinações e combinações

4.1. Observe o triângulo de Pascal e a tabela. Consegue ver alguma relação entre os valores do triângulo e as combinações apresentadas na tabela?

4.2. Das expressões seguintes, qual é a que permite determinar qualquer termo desta sucessão?

(A) $u_n = \sum_{p=1}^{n} C_p^n$, considerando que $C_p^n = 0$, caso $p > n$.

(B) $u_n = \sum_{p=1}^{n} C_{p-1}^{n+1-p}$, considerando que $C_p^n = 0$, caso $p > n$.

(C) $u_n = \sum_{p=1}^{n} C_{p-1}^{n-p}$, considerando que $C_p^n = 0$, caso $p > n$.

Capítulo 5 – Simetrias e Isometrias na música

Muitos compositores têm usado isometrias e simetrias nas suas composições. Segundo Ribeiro (2016), um desses compositores foi Bach. No final da sua vida Bach interessou-se muito pela simetria musical, tendo criado vários enigmas musicais. Estes enigmas estão presentes em alguns dos seus cânones e fugas, e só depois de decifrados poderiam ser interpretados corretamente.

É importante referir, antes de continuar, que existe uma diferença fundamental que condiciona a comparação de simetrias no plano (Euclidiano), em que as duas dimensões têm a mesma natureza, e na pauta (plano musical), onde as duas dimensões, altura e tempo, são de naturezas diferentes. Este facto faz com que o número de simetrias e isometrias possíveis no plano, seja muito superior ao que é possível na pauta.

O plano musical pode ser encarado como uma espécie de grelha reticulada, onde o tempo "percorre" o eixo das abcissas, e o eixo das ordenadas reflete a altura das notas musicais.

No plano musical apenas existem simetrias ao nível dos eixos horizontal e vertical, ao contrário do que se verifica no plano em que podem existir, também, simetrias axiais, sobre um qualquer eixo.

A tabela seguinte apresenta o resumo das transformações isométricas e do respetivo resultado ao nível musical.

Transformações geométricas	Resultado ao nível musical		
	Horizontal	Vertical	Horizontal e vertical
Translação	Repetição ou imitação a uníssono (atraso no tempo)	Movimento paralelo (através de transposição)	Imitação (atraso no tempo com transposição)
Simetria de translação	Cânone perpétuo/ostinato	Harmonias paralelas	Sequências
Reflexão	Movimento inverso	Movimento retrógrado	
Simetria de reflexão	Movimento inverso em simultâneo com o original	Movimento retrógrado mantendo-se o original	
Reflexão deslizante	Movimento inverso com atraso no tempo	Movimento retrógrado com transposição	
Simetria de reflexão deslizante	Ostinato com movimento inverso		
Rotação de 180º	Movimento retrógrado inverso		

Tabela 28: Quadro síntese das transformações isométricas

5.1. Translação

A translação é uma isometria que, ao ser aplicada a uma figura, a desloca segundo uma determinada direção, sem a rodar, nem alterar a sua forma. Ao nível do plano musical importa analisar três tipos de translação: a horizontal, a vertical e a oblíqua.

5.1.1. Translação horizontal

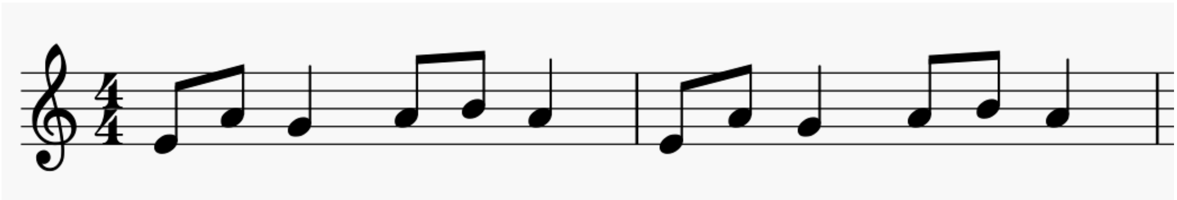


Fig.101: Exemplo de translação horizontal

A translação horizontal implica, no campo musical, uma translação no tempo, translação esta que se manifesta através de repetição ou imitação a uníssono.

O exemplo mais simples de translação horizontal é a repetição de um motivo no decurso da linha melódica, que se pode observar na figura seguinte.

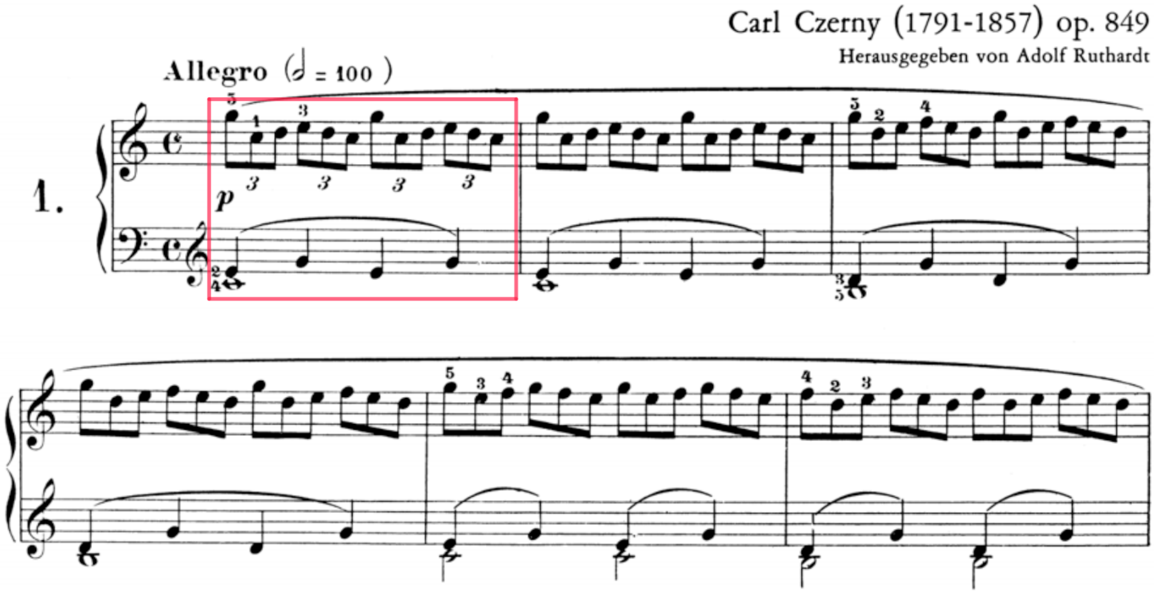


Fig.102: Excerto da obra de Czerny, opus 849 Estudo nº1

A utilização sistemática da repetição ou imitação a uníssono pode dar origem a dois tipos de forma musical: o cânone e o ostinato (ou o Riff).

O cânone é uma estrutura musical na qual uma melodia é interpretada por várias vozes em simultâneo, e cada uma das vozes inicia a sua interpretação decorrido um determinado intervalo de tempo, após a entrada da voz anterior. Trata-se, portanto, de aplicar sucessivas translações, tantas quantas as vozes que constituem o cânon.

Um exemplo deste tipo de cânones é a canção infantil francesa Frère Jacques. Na figura seguinte pode observar-se um excerto desta partitura.

Fig.103: Frère Jacques

Fonte: www.musescore.com

O ostinato consiste na repetição insistente de um motivo musical, que pode ser efetuado apenas por algumas das vozes que constituem a peça, ou por todas as vozes.

Num ostinato é gerada uma simetria de translação, que será analisada mais à frente.

5.1.2. Translação vertical

Se a translação for efetuada segundo o eixo vertical, eixo que indica a altura das notas, a transformação isométrica das notas produz uma transposição, isto é, obtém-se a mesma melodia, mas mais aguda ou mais grave, consoante o intervalo de transposição é ascendente ou descendente.

Fig.104: Exemplo de translação vertical

Sempre que a linha melódica original é executada em simultâneo com a linha transposta forma-se um **movimento paralelo**, muito utilizado em vários tipos de música. Os intervalos mais habituais são os de 3ª ou 6ª (e 8ª nas partituras de orquestra) Um exemplo deste tipo de translação pode ser observado na canção popular “Meu lírio Roxo do Campo” onde o refrão é cantado à terceira, figura 105.

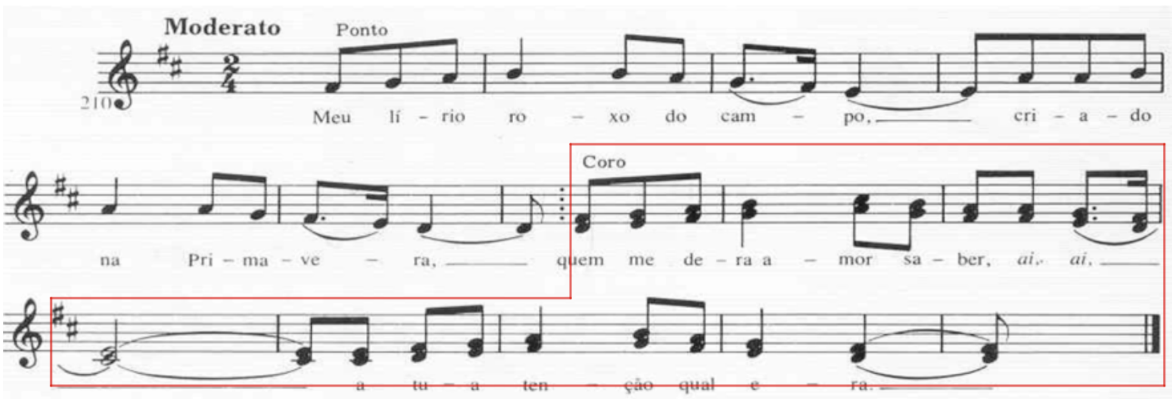


Fig.105: Partitura da música “Meu Lírio Roxo do Campo”, autor desconhecido

5.1.3. Translação oblíqua (horizontal e vertical)

Um recurso composicional muito utilizado na música erudita, desde a origem da música polifónica até aos dias de hoje, é a imitação. Este recurso resulta de efetuar translações no tempo e nas alturas em simultâneo.

Bach utilizou exaustivamente este recurso, ilustrado na figura seguinte que contém um excerto da sua Fuga em Ré M.

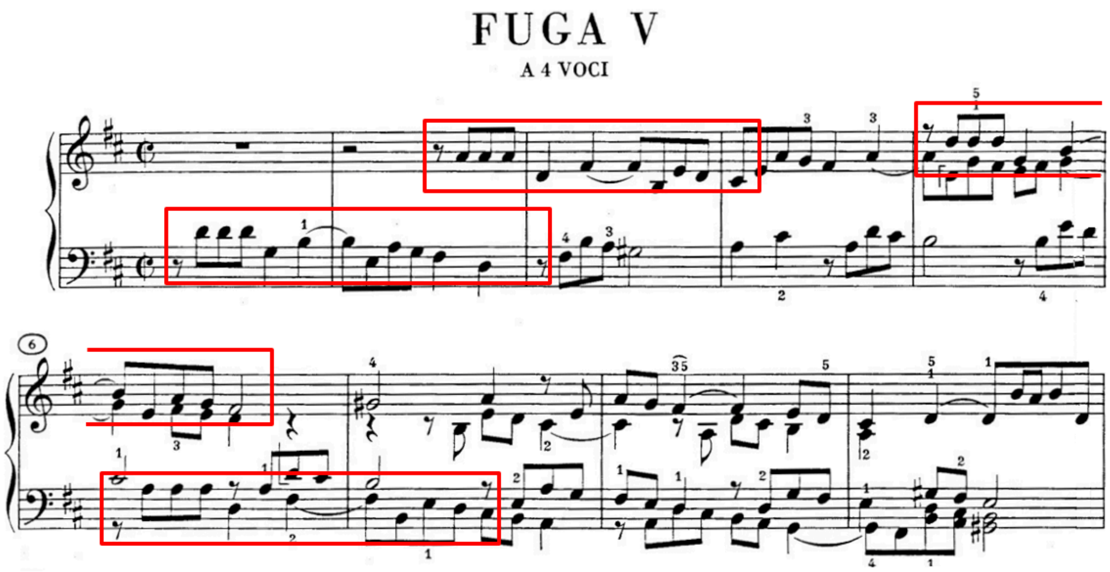


Fig.106: Excerto de Fuga em Ré M, BWV 874 de J. S. Bach

Um exemplo mais recente da utilização deste recurso composicional pode ser observado na obra de “The Cat´s Fugue” (1981), de Greg Anderson.

Fig.107: Excerto da partitura de Greg Andreson - “The Cat’s Fugue” (1981)

5.1.4. Simetria de translação

5.1.4.1. Simetria de translação horizontal

Uma obra musical pode apresentar simetria de translação horizontal, ou seja, no tempo, se se repetir indefinidamente. Na prática isto nunca vai ocorrer, tal como a simetria de translação no plano geométrico não se pode observar na realidade pois implica figuras infinitas. No entanto, sempre que se observam um número razoável de repetições (3 ou mais) pode-se identificar a peça (ou a secção da peça) como possuindo simetria de translação, tal como se identifica um friso quando se vêm apenas alguns azulejos em fila.

Podem observar-se exemplos deste tipo de simetria em diferentes estilos de musica. No rock, por exemplo, verifica-se a utilização de riffs (melodias breves e rítmicas), tocadas repetidamente ao longo da música, geralmente executadas por uma guitarra. Na música dos Rolling Stones, (I Can't Get No) Satisfaction, cujo excerto da partitura se pode observar na figura seguinte, está presente este tipo de simetria.

Fig.108: Excerto da música (I Can't Get No) Satisfaction

Fonte: http://www.musicnotes.com/

Outro exemplo deste tipo de simetria pode ser observado na Oferenda Musical de Bach. No cânon para dois violinos há uma dupla utilização da translação horizontal. Esta está presente na relação entre as duas vozes que o formam (as duas vozes superiores da obra) e, também, na formação da simetria pela repetição que surge ao longo da obra.

Fig.109: Oferenda Musical: Cânon a uníssono para dois violinos, de J.S. Bach
Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=HH_PbiWnCd8

5.1.4.2. Simetria de translação vertical

Uma obra musical, ou uma secção, possui simetria de translação nas alturas (vertical) quando apresenta movimento paralelo repetido “indefinidamente”. Na prática só existe um número reduzido de linhas paralelas, sendo que mais do que três linhas paralelas formam harmonias dissonantes.

Pode observar-se, na imagem 110, um exemplo deste tipo de simetria na obra de Claude Debussy (1862-1918), “La cathédrale engloutie”.

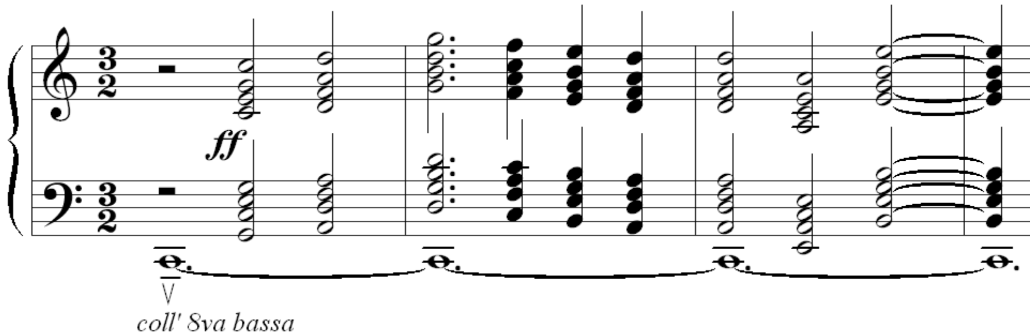


Fig.110: Excerto da partitura "La cathédrale engloutie" de Claude Debussy.
Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/La_cath%C3%A9drale_engloutie

5.1.4.3. Simetria de translação horizontal e vertical

Se se repetir "indefinidamente" uma frase ou secção com transposição (sempre ao mesmo intervalo) obtém-se simetria de translação no tempo e nas alturas. Na prática só se vêm (ouvem) algumas repetições. Os exemplos típicos deste tipo de simetria são as sequências.

Nas imagens seguintes apresentam-se dois exemplos de sequências.

Fig.111: Excerto da partitura de "Canção a 4" de António Carreira (1520-ca. 1590)

Fig.112: Excerto da partitura "Angels we have heard on high"

Fonte: http://www.onlinesheetmusic.com/angels-we-have-heard-on-high-p288608.aspx

5.2. Reflexão

A reflexão é uma transformação geométrica que altera a imagem, invertendo-a, tal como o reflexo de uma imagem num espelho. Sempre que, ao fazer uma reflexão, se mantêm as duas partes, obtém-se uma simetria.

5.2.1. Reflexão segundo um eixo vertical: movimento retrógrado

Esta operação consiste em reescrever uma sequência começando pela última nota, percorrendo-a em sentido oposto, fazendo com que as notas da melodia original sejam repetidas em sequência contrária.

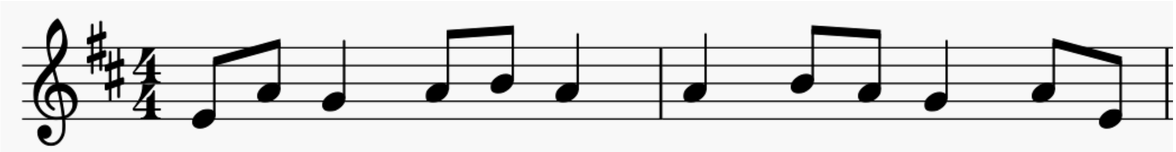


Fig.113: Exemplo de reflexão segundo um eixo vertical

5.2.2. Reflexão segundo um eixo horizontal: inversão

Esta operação consiste em inverter um tema refletindo-o, horizontalmente, segundo um eixo de simetria na linha de uma nota.

Fig.114: Exemplo de reflexão segundo um eixo horizontal

Pode observar-se um exemplo deste tipo de reflexão na obra "The Lamb" de John Tavener, apresentada em 5.3.3..

5.2.3. Simetria de reflexão segundo um eixo vertical (ao longo do tempo)

Se, numa reflexão segundo um eixo vertical, se executarem as duas sequências, a original e a retrógrada obtém-se uma simetria melódica, no tempo.

Um exemplo deste tipo de estrutura é o minueto da Sonata número 4 para piano de Haydn. É possível identificar um eixo de simetria vertical na divisão entre os compassos 10 e 11. O mesmo se passa (com exceção de uma ou outra pequena alteração) com o trio que se segue ao minueto.

Fig.115: Excerto do “Menuetto al rovescio”, da sonata nº4 para piano de Haydn

Também se pode observar um exemplo deste tipo de simetria na Oferenda Musical de Bach, no “Cânone caranguejo”.

Fig.116: Excerto da partitura Oferenda Musical, cânone “caranguejo”, de Bach

Como refere Hofstadter (2000), Bach apreciava especialmente a inversão dos temas, estando estas muito presentes no seu trabalho. Neste cânone pode observar-se uma espécie de cópia retrógrada, sendo o tema tocado de trás para a frente no tempo, mantendo o princípio base da reflexão, ou seja, a melodia é composta de forma a que *desça* sempre que o tema original *suba*, sempre com o mesmo número exato de meios tons

No link apresentado de seguida, pode ver-se a simulação de uma tira de Mobius à medida que se executa esta obra.

https://www.youtube.com/watch?v=xUHQ2ybTejU

5.2.4. Simetria de reflexão segundo um eixo horizontal (nas alturas)

Obtém-se uma simetria de reflexão nas alturas sempre que se faz uma reflexão de eixo horizontal e se mantêm as duas partes. A simetria pode ser feita na obra toda ou apenas numa parte.

Não existem muitos exemplos musicais de simetria de reflexão nas alturas já que, por razões harmónicas, este recurso limita muito as possibilidades de composição. Porém podem observar-se exemplos deste tipo de simetria de reflexão na obra “The Lamb” (1982) de John Tavener, apresentada em 5.3.3..

5.3. Reflexão deslizante

A reflexão deslizante consiste de uma translação seguida de uma reflexão segundo um determinado eixo (paralelo ao vetor da translação), ou vice-versa. No plano musical só é possível efetuar reflexões deslizantes segundo eixos verticais ou horizontais.

5.3.1. Reflexão deslizante de eixo vertical

Neste tipo de isometria o tema é transposto (para um tom mais agudo ou mais grave) e depois escrito de forma retrógrada.

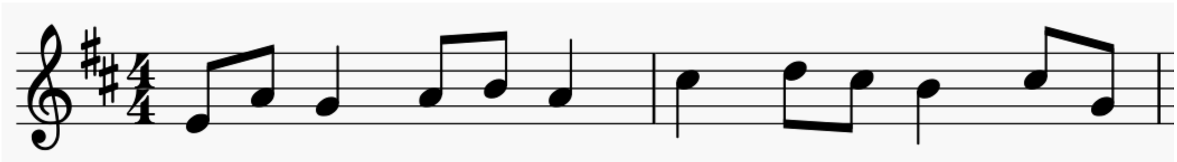


Fig.117: Exemplo de reflexão deslizante de eixo vertical

5.3.2. Reflexão deslizante de eixo horizontal

Para realizar esta combinação, no plano musical, é necessário inverter o tema e atrasar o seu início no tempo. A inversão poderá ser com ou sem transposição, dependendo da “posição” do eixo de reflexão.

Na imagem seguinte, figura 118, pode observar-se este tipo de reflexão deslizante, que persiste do início até ao final da obra. Por isto mesmo trata-se de um cânone, sendo, no entanto, um cânone especial (com inversão).

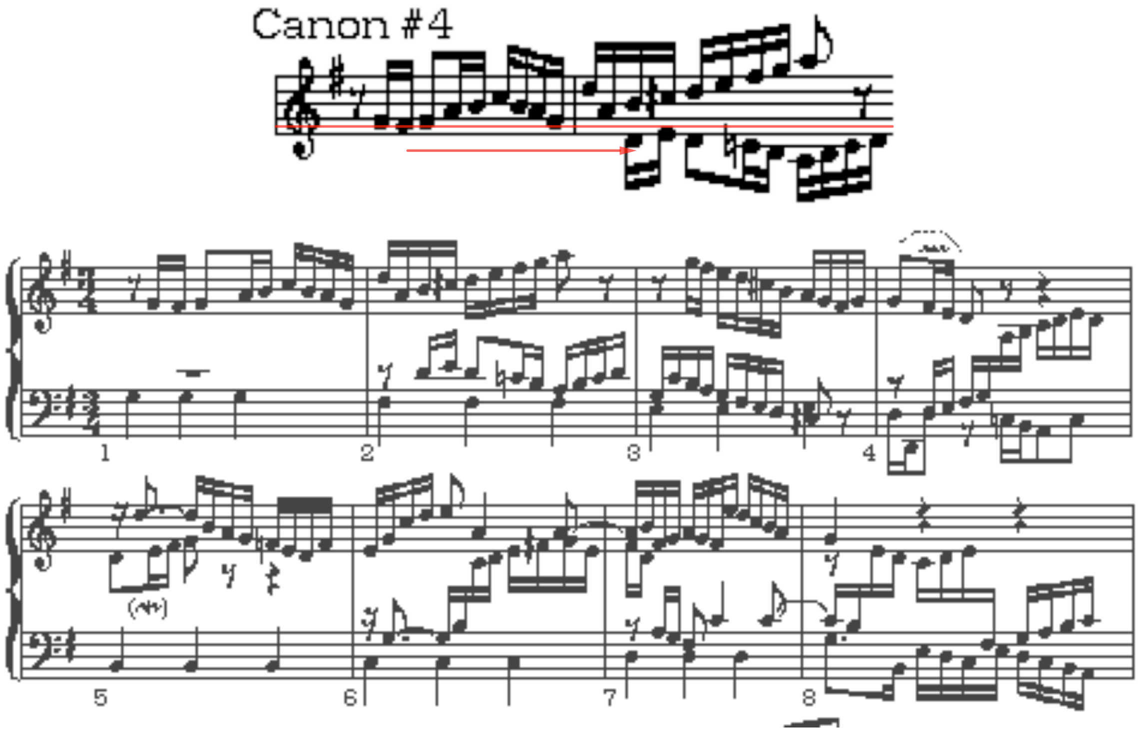


Fig.118: Excerto da partitura de J. S. Bach, Variações Goldberg, Cânon à 4ª, nº 12

5.3.3. Simetria de reflexão deslizante de eixo horizontal

Uma simetria de reflexão deslizante de eixo horizontal obtém-se fazendo uma reflexão nas alturas, e, mantendo as duas partes, repetindo-se o conjunto “indefinidamente”. Na prática só algumas das repetições são ouvidas.

Na imagem seguinte pode observar-se este tipo de simetria.

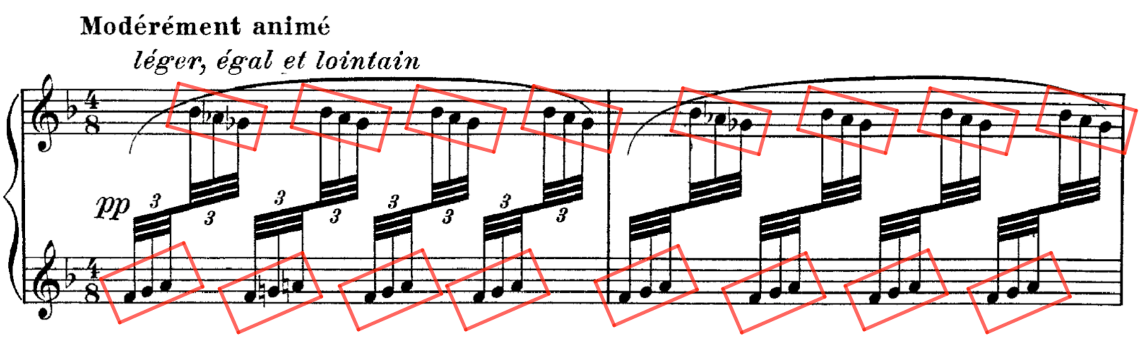


Fig.119: Excerto do Prelúdio Feux d’artifice, de Claude Debussy (1862-1918)

Segundo Arbonés & Milrud (2011), a obra *The Lamb*, do compositor inglês Jonh Tavener (1944-2013) pode ser vista como um jogo de simetrias: o primeiro compasso apresenta uma melodia que se repete no segundo compasso (translação), que surge acompanhada por uma segunda voz, que não é mais do que uma inversão (simetria relativamente a um eixo horizontal situado na nota sol) da melodia original. No terceiro compasso o compositor expõe um novo tema que se completa no quarto compasso com uma versão retrógrada (simetria relativamente a um eixo vertical) dela própria; os quinto e sexto compassos repetem os terceiro e quarto compassos, adicionados de uma segunda voz que é uma versão simétrica (simetria horizontal) dela própria.

Ainda segundo os mesmos autores, apesar de os intervalos entre cada par de notas da melodia ser estritamente respeitado, por razões estéticas o compositor modifica a duração da última nota de cada frase. No entanto o efeito da simetria não se perde, uma vez que a linha melódica vai sendo construída na mente, através de um desenho que resulta da ligação entre os ataques das notas, independentemente da sustentação e decaimento destas.

Fig.120: Partitura da música de Jonh Tavener, The Lamb (1982)

Fonte: www.sheetmusicdirect.com

5.4. Rotação

Uma rotação de 180º é uma composição de duas reflexões de eixos perpendiculares. No plano musical é conhecido por movimento retrógrado inverso pois é equivalente a um movimento retrogradado (reflexão de eixo vertical) seguido de uma inversão (reflexão de eixo horizontal), ou vice-versa. Este é o único tipo de rotação que se pode aplicar ao plano musical, já que outros ângulos de rotação não fazem sentido.

Pensa-se que Mozart terá composto um cânone reversível “Der Spiegel Duet”, obra escrita para dois violinos, cujas melodias estão rodadas de 180º, uma relativamente à outra.

“O que é original nesta obra é que uma única pauta serve para os dois violinistas em simultâneo, que a poderão executar se estiverem ambos frente a frente, a olhar para a mesma folha de papel.” (Simões, 2006, pg. 64). Na verdade é conveniente ter duas cópias da partitura pois um dos executantes terá que ler a mesma virado com a cabeça para os pés, ou seja rodando-a 180º.

Isto é possível devido à existência de uma clave de sol em cada extremo da pauta, uma invertida relativamente à outra; desta forma, ao rodar a página, um sol torna-se num ré, um lá num dó, etc., mantendo invariante apenas o si.

Fig.121: Partitura de Der Spigel (The Mirror) Duet

Fonte: www.musescore.com

5.5. Atividades práticas

Neste capítulo estão incluídas três atividades, a saber:

1 – Ostinato de Harry Potter;

2 – Elaboração de partituras;

3 – Análise de partituras

A primeira atividade pode ser aplicada em qualquer ano de escolaridade.

As outras duas atividades devem ser aplicadas a alunos dos sexto e/ou oitavo anos, uma vez que abordam os conceitos de isometria e simetria lecionados nesses anos de escolaridade. Em qualquer dos casos os alunos deverão ter conhecimentos musicais para poderem realizar as atividades.

Com a realização da primeira atividade pretende-se que os alunos se familiarizem com ritmos musicais e múltiplos dos números naturais, de forma interativa entre grupos.

Na terceira atividade procede-se à análise das isometrias e/ou simetrias que estão presentes em diversas obras musicais.

Atividade 1- Ostinato de Harry Potter

Para a realização desta atividade deve começar-se por dividir a turma em quatro grupos.

Seguidamente visualize, com os alunos, o seguinte vídeo:

https://www.youtube.com/watch?v=0Y1KL4datQM

Cada grupo elabora uma pequena frase rítmica com texto (criados pelo grupo) e com duração pré determinada (igual para todos os grupos).

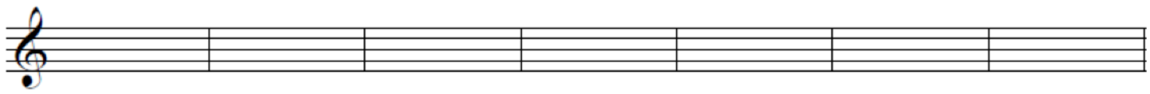
De seguida os grupos irão executar o ostinato entrando um de cada vez, e repetindo a sua frase durante todo o tempo. A entrada de cada novo grupo é feita após o anterior ter executado três vezes a sua frase.

Após três repetições do ultimo grupo termina o ostinato.

Atividade 2- Elaboração de partituras

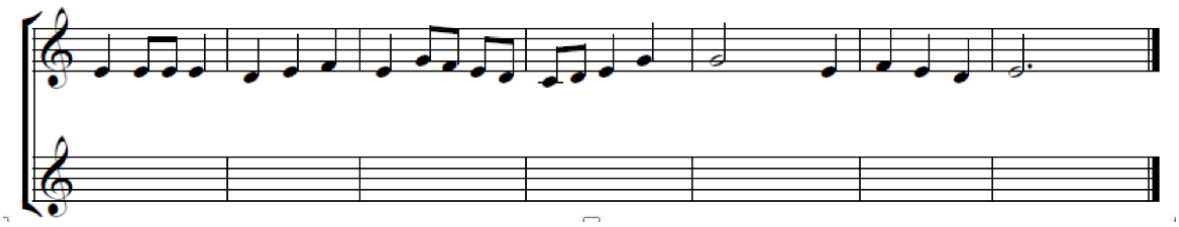
1. Observe a melodia seguinte:

1.1. Na pauta seguinte escreva o seu movimento retrógrado.



Qual o tipo de isometria que aplicou?

1.2. Agora efetue uma transposição, mantendo a tonalidade de Dó Maior, da melodia obtida na alínea anterior a uma terceira inferior, escrevendo o resultado na pauta abaixo.



Qual o tipo de isometria que resulta entre as duas melodias (superior e inferior)? Esta frase a duas vozes possui simetria?

2. Complete as partes em falta efetuando imitações.

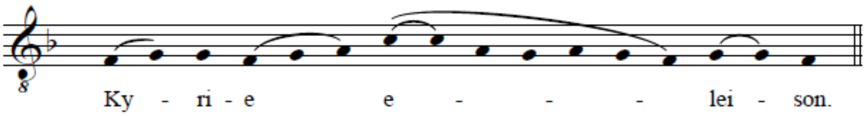


Fig.122: Excerto de E. L. Morago (ca. 1575-1630), *Missa in adventu – kyrie*

Que tipo de isometria esteve a aplicar na realização desta tarefa?

Atividade 3- Análise de partituras

Identifique o tipo de isometria e/ou simetria que está presente em cada um dos excertos seguintes, e assinale as secções musicais envolvidas na isometria/simetria (objeto e imagem).

a) Excerto da obra Ave Maris Stella de Guilhaume Dufay (1379-1474)

Fig.123: Excerto da obra Ave Maris Stella

b) Excerto de um cânone de Johann Pachelbel (1653-1706) para três violinos

Fig.124: Excerto de um cânone

c) Excerto da Oferenda musical de J.S. Bach, BWV 1079

Fig.125: Excerto da Oferenda musical de J.S. Bach BWV 1079

Fonte: https://musescore.com/user/13172/scores/234061

Capítulo 6 - Recursos aleatórios e deterministas

Neste capítulo serão abordados três exemplos de recursos composicionais que têm por base a aleatoriedade ou o determinismo, este último através do minimalismo. O primeiro exemplo aborda o trabalho de Mozart nos jogos de dados musicais, durante o século XVIII. Mozart, recorrendo à aleatoriedade na escolha de compassos, pré elaborados, permitiu a criação de muitas peças musicais, todas elas respeitando o seu estilo. Será também abordado um tipo de música designada por música estocástica, cujo expoente máximo foi o compositor grego Iannis Xenakis, durante o século XX. Neste tipo de música os recursos deterministas são utilizados em prol da criação de um estilo de música particular. Será ainda abordado um pouco de um tipo de música, também ela nascida no século XX, a música minimalista que, utilizando poucos recursos composicionais e os computadores, permite a criação de melodias diferentes das praticadas até então.

6.1. Musikalisches Wurfelspiel

Durante o século XVIII foram comuns os jogos de dados musicais, *Musikalisches Wurfel*spiel, alguns dos quais, pensa-se, terão sido criados por Mozart, ver, por exemplo, Simões (2006).

Num destes jogos atribuído a Mozart (K. 294d), o jogador “compõe” a sua peça, um minueto, formada por duas secções, cada uma com oito compassos. São necessários dois dados e duas tabelas de correspondências entre os resultados dos lançamentos e os compassos a executar (para cada uma das secções), tabelas estas desenvolvidas por Mozart.

O jogador lança os dois dados e soma os resultados obtidos. Consulta depois a tabela de lançamentos, para ver qual o número do compasso que irá constituir o primeiro compasso do seu minueto. Na tabela de lançamentos, as colunas correspondem à ordem do compasso que se está a determinar, e as linhas à soma obtida nos dados (os números no interior da tabela são todos diferentes). Este procedimento é realizado dezasseis vezes. No final o jogador obtém uma peça musical construída segundo os parâmetros do estilo de Mozart.

WOLFGANG AMADEUS MOZART

Musikalisches Würfelspiel

Table of Measure Numbers

Part One

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

Part Two

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Fig.126: Tabelas de lançamentos de um jogo Musikalisches Wurfelspiel, do compositor Mozart

Fonte: http://abjad.mbrsi.org/literature_examples/mozart.html

Table of Measures

Fig.127: Excerto da tabela de compassos de um jogo Musikalisches Wurfelspiel, do compositor Mozart

Fonte: http://abjad.mbrsi.org/literature_examples/mozart.html

6.2. Iannis Xenakis

“Iannis Xenakis figura entre os compositores mais notáveis do século XX. Músico, arquiteto, apaixonado por astronomia e literatura grega antiga, foi um dos primeiros compositores modernos a recorrer a uma abordagem da música mais abrangente, que não se limita à tradição da música ocidental. O seu esforço em ultrapassar barreiras entre a música e outras áreas do conhecimento abriu novos caminhos composicionais. Xenakis utilizou a matemática para compreender e exprimir as bases teóricas subjacentes às suas ideias musicais, levando-o a propor uma formalização da música.” (Gibson, 2017).

A música estocástica, termo utilizado por Xenakis, recorreu a diversos campos da matemática, tais como, teoria das probabilidades, teoria dos jogos, teoria dos grupos, teoria dos conjuntos, álgebra de Boole, entre outros. Na composição da obra Pithoprakta (1955-56), Xenakis utilizou a mecânica estatística dos gases; em Diamorphoses (1957-58) utilizou a distribuição estatística de pontos no plano; em Atrées e ST/10 (1956-62) utilizou a distribuição Normal, entre outros exemplos, Gibson (2017).

Xenakis recorria frequentemente ao uso de computadores, tendo fundado o *Centre d’Études de Mathématique et Automatique Musicales* em 1972. Em 1954 compôs a obra Metastasis, obra esta que apresenta as premissas da música estocástica. Esta obra pode ser ouvida e “vista” acedendo ao link seguinte:

https://www.youtube.com/watch?v=SZazYFchLRI

Esta obra foi composta para uma orquestra com 61 instrumentos. As progressões geométricas estão presentes quer ao nível da duração dos intervalos em glissando, quer ao nível da dinâmicas e timbres. Na figura seguinte pode observar-se um esquema da obra para os compassos entre 309 e 314.

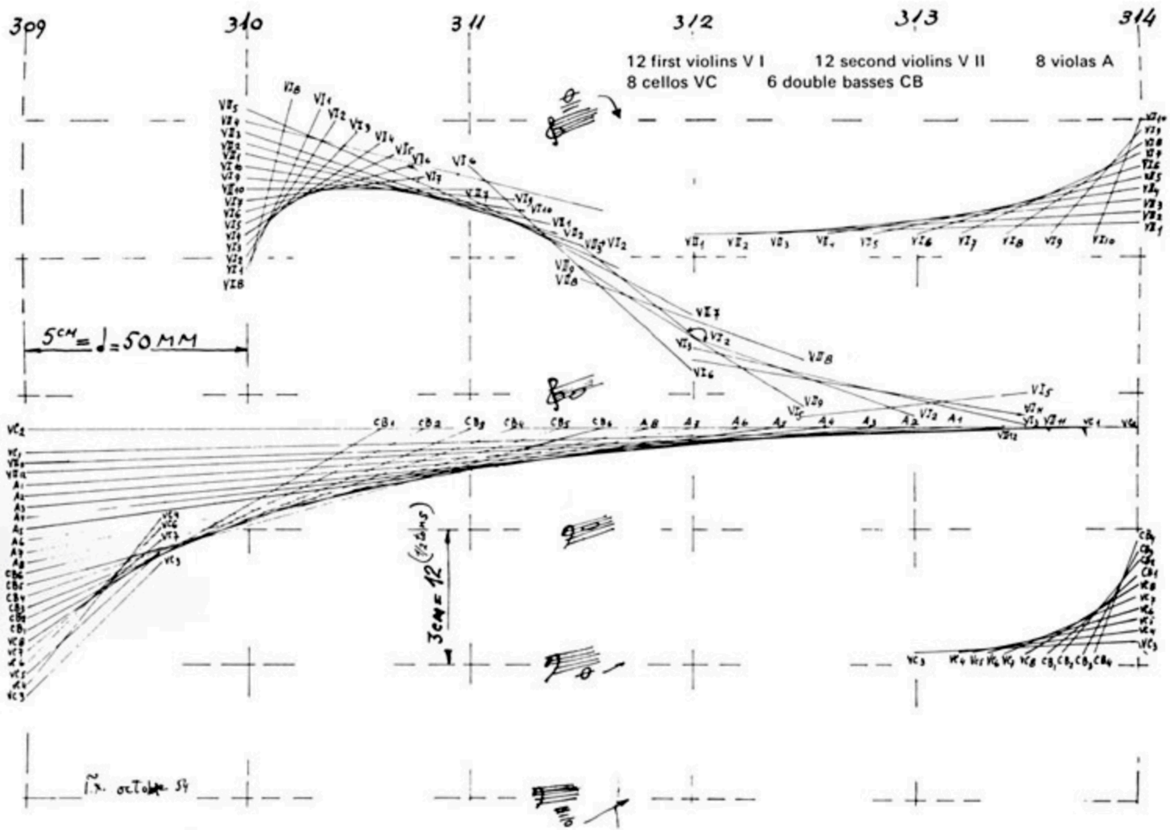


Fig.128: Excerto da partitura de Metastasis

Fonte: https://ichef.bbci.co.uk/images/ic/976x549_b/p00tcy3k.jpg

Entre 1956 e 1957 Xanakis escreveu a obra Achorripsis onde utiliza a distribuição de Poisson para racionalizar o processo de construção da matriz sobre o qual a música foi escrita, ou seja, utilizou esta distribuição de probabilidades como um esquema de formalização musical. Na figura seguinte pode observar-se a matriz elaborada por Xenakis.

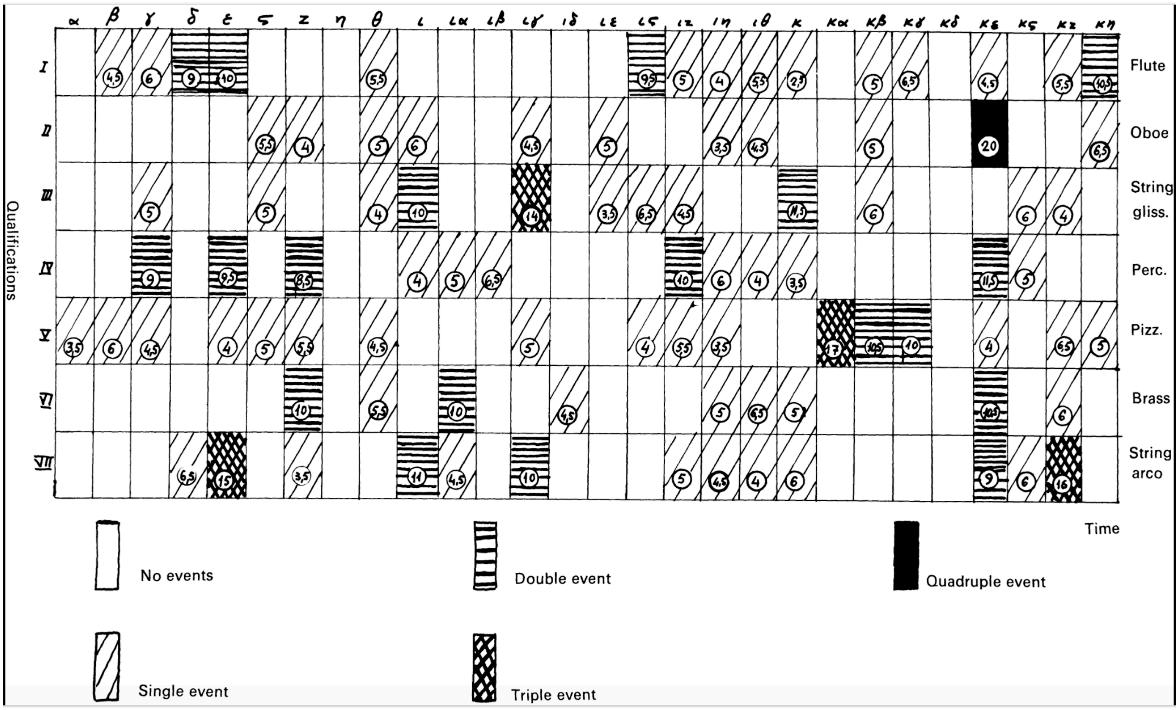


Fig.129: Matriz da obra Achorripsis

Fonte: http://www.moz.ac.at/sem/lehre/lib/mat/image/master.img-000.png

6.3. Música minimalista

O minimalismo musical nasceu nos Estados Unidos da América, na década de 60, fruto da procura pela simplicidade e/ou por oposição à complexidade de outras músicas elaboradas até então, segundo Grout & Palisca (1997). O nome minimalismo resulta do facto de este estilo viver da imitação intencional do vocabulário ritmico, melódico, harmónico e instrumental. Quer o nome minimalista, quer a tendência em si, talvez se devam a um grupo de artistas plásticos de Nova Iorque, grupo este que concebeu estruturas cíclicas e repetitivas utilizando elementos simples, tais como linhas e pontos. No entanto, ainda segundo os mesmos autores, os limites temporais das composições ou improvisações musicais, bem como a duração de cada um dos seus elementos estavam muito longe de ser, de facto, minimalistas.

Segundo Cervo, (2005), os seus fundadores foram: La Monte Young (1935); Terry Riley (1935); Steve Reich (1936) e Philip Glass (1937).

O músico Terry Riley (1935) produziu, nos anos sessenta, diversas experiências num estúdio eletrónico com a repetição insistente de frases curtas sobre uma pulsação regular e sempre contínua, segundo Grout & Palisca (1997). Steve Reich desenvolveu um método com analogias ao cânone, no qual os músicos tocam o mesmo material, mas um pouco desfasados uns dos outros (desfasamentos estes que vão mudando ao longo da obra). Um exemplo deste tipo é a obra “Claping music for two performers” composta em 1972. Esta obra é toda executada com o batimento de palmas (claping). A partitura desta obra pode ser visualizada na imagem seguinte e baseia-se num único compasso inicial que é produzido várias vezes, com alterações mínimas que vão dando a dinâmica necessária ao fluir da peça.

Fig.130: Partitura de "Claping music for two performers".

Fonte: http://earreader.nl/wp-content/uploads/2016/01/SteveReich-ClappingMusic.pdf

Cada compasso é repetido 12 vezes, sendo a duração da peça de, aproximadamente, cinco minutos. O executante 1 limita-se a repetir sistematicamente o compasso inicial e o executante 2 vai executando repetições desse mesmo compasso mas antecipando a sua entrada, uma colcheia de cada vez. Como se pode observar na partitura, os dois executantes só voltam a executar o primeiro compasso ao mesmo tempo ao fim de doze compassos, no décimo terceiro compasso, sendo cada um destes executado doze vezes. No total da peça são executados 13x12=156 compassos.

Atividades práticas

Neste capítulo estão incluídas duas atividades, a saber:

1 – Jogo de dados de Mozart;

2 – Claping music.

A primeira atividade destina-se apenas a alunos do décimo segundo ano.

A segunda atividade pode ser aplicada a alunos de qualquer ano de escolaridade.

Na primeira atividade os alunos irão trabalhar conceitos de probabilidade, relacionados a um tipo de jogo do século XVIII, o jogo de dados de Mozart.

A segunda atividade pretende dar a conhecer um tipo de música que se produz apenas com as mãos, onde se podem introduzir pequenos conceitos matemáticos, como por exemplo, determinar o número total de compassos realizados, depois de ser conhecida a regra musical de criação da peça.

Atividade 1 – Jogo de dados de Mozart

1. Após perceberem a dinâmica do jogo os alunos podem responder às questões seguintes.

1.1. Quantos compassos diferentes criou Mozart para este jogo?

1.2. Quantos minuetos diferentes é possível criar? Qual será a ordem de grandeza do número obtido?

Relativamente ao cálculo do número de minuetos que se podem formar, os alunos deverão ter em conta que cada lançamento de dados é independente.

1.3. Se cada um dos minuetos obtidos desta forma se pudesse tocar num segundo, para tocar o total de minuetos diferentes seria necessário quanto tempo?

Curiosidade: O planeta Terra tem cerca de quatro mil, quinhentos e quarenta milhões de anos, ou seja, $4{,}54 \times 10^9$. Comparando estes dois números pode concluir-se que, para tocar todos os possíveis minuetos, um pianista demoraria cerca de $1/3$ da idade da Terra.

1.4. Qual é a probabilidade de obter dois minuetos iguais, jogando o jogo duas vezes?

2. Observe as seis frases rítmicas seguintes:

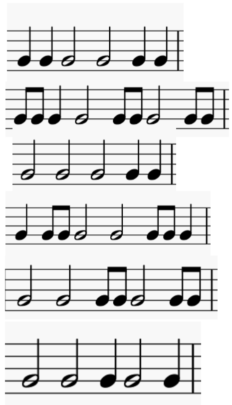


Fig.131: Frases musicais

2.1. Escolha, de forma aleatória e sequencial, quatro destas frases para formar uma secção rítmica.

2.1.1. De quantas maneiras diferentes pode fazer a sua escolha, no caso de não poder repetir frases?

2.1.2. Caso haja a possibilidade de utilizar frases repetidas, quantas são as possibilidades de escolha?

2.2. Considere a experiência em que dois alunos escolhem, de forma aleatória e sem reposição, três das seis frases rítmicas apresentadas.

Cada aluno executa a sua secção musical.

2.2.1. Quantas secções diferentes podem ser elaboradas, por cada aluno?

2.2.2. Qual a probabilidade de, ao executarem as suas secções em simultâneo, pelo menos duas frases coincidam?

Atividade 2- Claping music

Aceda ao link seguinte e visualize o filme.

https://www.youtube.com/watch?v=eu-tRXgOrdg

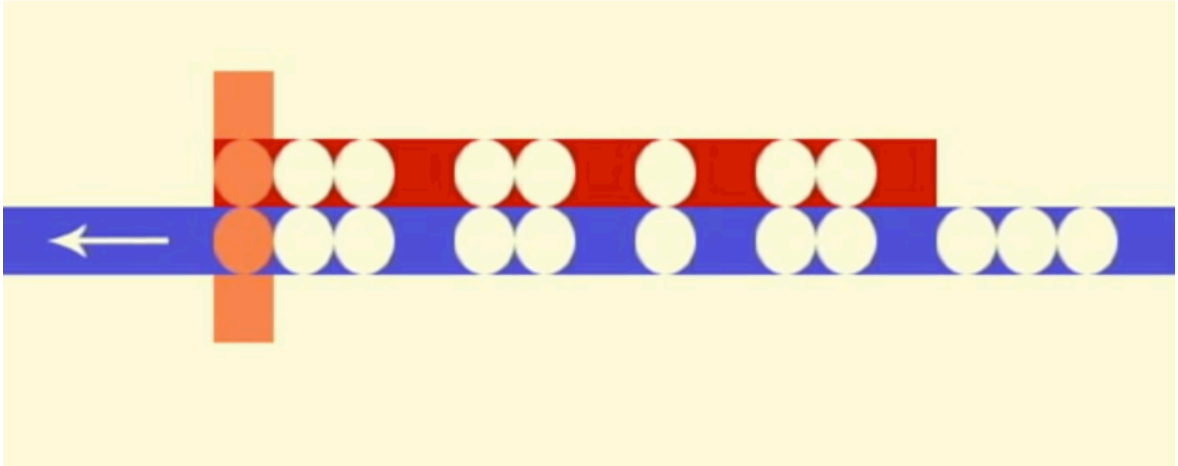


Fig. 132: Imagem inicial do esquema da música

Nesta variação da obra Claping music, o número de repetições de cada motivo (compasso) é 4. No retângulo vermelho podem contar-se doze tempos (círculos brancos e espaços vazios). O retângulo vertical cor de laranja indica a posição na “pauta” a cada momento. Ao fim de quatro repetições do motivo inicial o retângulo azul mexe-se um espaço para a esquerda (um dos tempos é suprimido), ficando a imagem com a forma seguinte.

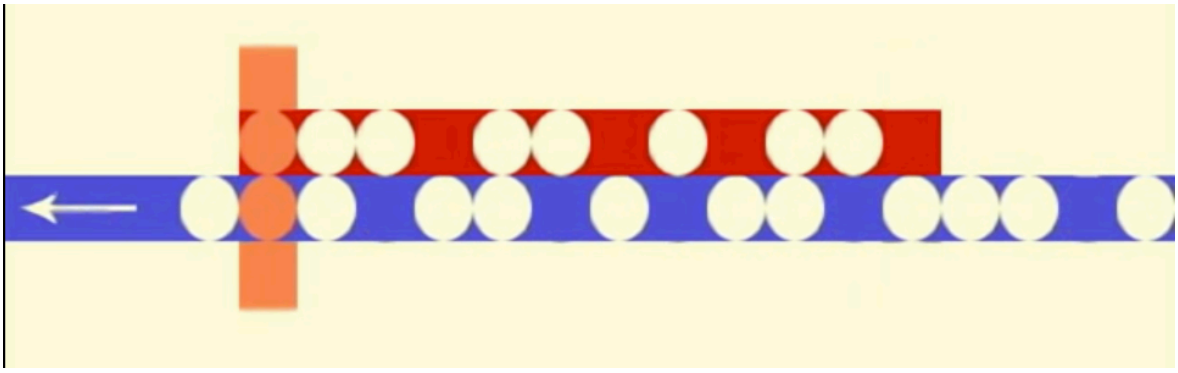


Fig.133: Imagem intermédia do esquema da música

Este procedimento repete-se até que, ao fim de algum tempo os dois retângulos voltam a ficar iguais, como na imagem seguinte.

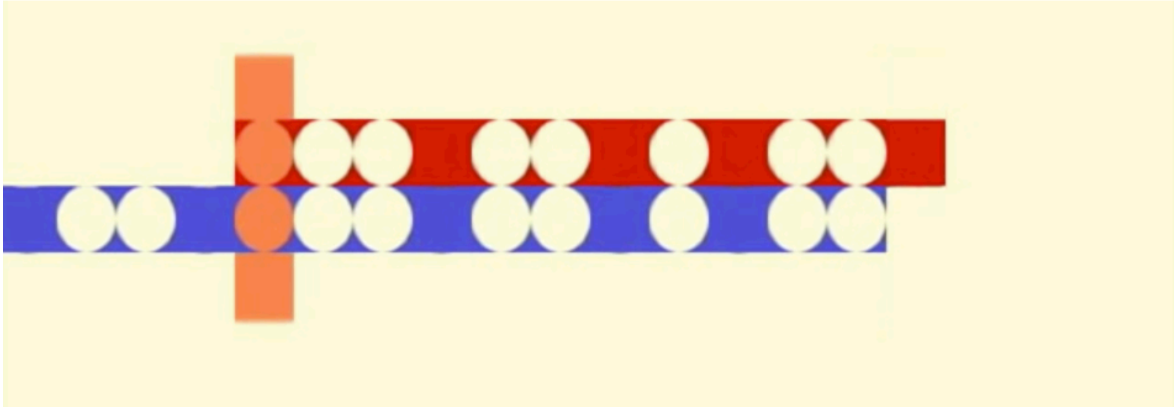


Fig.134: Imagem da parte final do esquema da música

A obra termina quando se repete, novamente, por quatro vezes o compasso inicial em sincronia

Quantos compassos decorrem até que surja novamente a posição inicial?

Quantos compassos são executados ao todo?

Conclusão

"A música é um exercício inconsciente de cálculos."
Leibniz (1646-1716)

Este trabalho baseou-se nas diversas ligações que é possível estabelecer entre a música e a matemática. Estas relações, conhecidas há vários séculos e cuja história e evolução se procurou apresentar neste documento, são de tal forma sólidas e intrínsecas que estas duas artes vivem uma relação de mutualismo.

No caso da matemática, se a abordagem em sala de aula e em determinados contextos for efetuada em correlação com a música, os alunos poderão beneficiar de um ambiente de aprendizagem diferente, eventualmente mais agradável e desmistificador do estereótipo negativo muitas vezes associado à disciplina. De facto, a matemática não se resume àquilo que os jovens tantas vezes pensam e verbalizam – um conjunto de fórmulas sem aplicação prática futura. Um dos propósitos desta dissertação foi precisamente desfazer este mito.

Foi também objetivo deste trabalho abordar a história da ligação entre a matemática e a música, desde a antiguidade à atualidade, através da análise das obras de diferentes matemáticos e músicos. Refiram-se como fundamentais, entre outras, as abordagens de Pitágoras, que com as suas experiências desenvolveu os primeiros intervalos musicais, que perduram até hoje. Ou Zarlino, que utilizando o mesolábio, conseguiu efetuar a divisão da oitava em várias partes iguais. A matemática está também claramente presente na criação dos instrumentos musicais. O violino, tomado como exemplo desta relação, foi aperfeiçoado por Stradivari tendo em conta a proporção áurea. Esta proporção foi, aliás, usada em muitas obras na antiguidade. Mais recentemente a matemática esteve na base da criação de estilos musicais aleatórios e deterministas, como por exemplo se observa no trabalho de Iannis Xenakis. Deliberadamente ou não, diversos músicos, tais como Bach, Mozart e Beethoven utilizaram a matemática na criação das suas obras, quer ao nível da divisão, quer na criação de padrões de repetição na construção das mesmas.

O insucesso na disciplina de matemática pode ser combatido através do recurso a experiências motivadoras e aliciantes e a situações onde os alunos vejam aplicações práticas da disciplina. Uma das formas de o fazer será, naturalmente, através da música. A música faz parte do dia a dia e é quase sempre um bom suporte de encorajamento a tarefas que apresentam maiores índices de resistência. Nada melhor do que, através da música, estimular a aprendizagem da matemática e implementar novas abordagens ao ensino da disciplina.

Com este trabalho conseguiu-se também alcançar o objetivo de elaborar fichas de trabalho para aplicação na sala de aula de matemática. Estas fichas constituem uma boa ferramenta de trabalho para professores e alunos. Algum deste material é de aplicação a qualquer ano de escolaridade e outro de aplicação ao ensino secundário.

Anexo – Proposta de resolução das atividades práticas

Capítulo 2

Atividade 1 - Propriedades das ondas sonoras

1. Aumentando a frequência o comprimento da onda diminui, como se pode observar nos gráficos, uma vez que, num mesmo meio, a frequência e o comprimento de onda são grandezas inversamente proporcionais.

2. O produto aproxima-se de 1.

3. Em todos os casos o produto obtido aproxima-se de 1, isto porque o período e a frequência são grandezas inversamente proporcionais, verificando-se a relação seguinte $p = \frac{1}{f}$.

Atividade 2 - Frequência, período e comprimento de onda

Nota	i	Frequência (Hz)	Período (s)	Comprimento (m)
Dó	-9	261,6256	0,0038	1,3149
Dó #	-8	277,1826	0,0036	1,2411
Ré	-7	293,6648	0,0034	1,1714
Ré #	-6	311,1270	0,0032	1,1057
Mi	-5	329,6276	0,0030	1,0436
Fá	-4	349,2282	0,0029	0,9850
Fá #	-3	369,9944	0,0027	0,9297
Sol	-2	391,9954	0,0026	0,8776
Sol #	-1	415,3047	0,0024	0,8283
Lá	0	440	0,0023	0,7818
Lá #	1	466,1638	0,0021	0,7379
Si	2	493,8833	0,0020	0,6965

Atividade 3- Grandezas associadas a uma forma de onda periódica

1.

Coluna A
Período
Frequência
Velocidade de propagação da onda
Comprimento de onda

Coluna B
s (segundo)
Hz (Hertz)
m/s (metro por segundo)
m (metro)

2. Em primeiro lugar é necessário calcular o valor da frequência da onda.

$$frequência = \frac{nº\ de\ vibrações}{intervalo\ de\ tempo} = \frac{1500}{1} = 1500\ Hz$$

$$p = \frac{1}{1500} \approx 0{,}0007\ s$$

$$c = \frac{340}{1500} \approx 0{,}2267\ m$$

3.

3.1. A velocidade de propagação do som aumenta à medida que se passa do estado gasoso para o estado líquido.

3.2. Tendo em conta que $f = \frac{1}{p}$ obtém-se $f = \frac{1}{0{,}001s} = 1000\ Hz$.

Uma vez que $c = \frac{v}{f}$ tem-se $c = \frac{4500}{1000} = 4{,}5\ m$

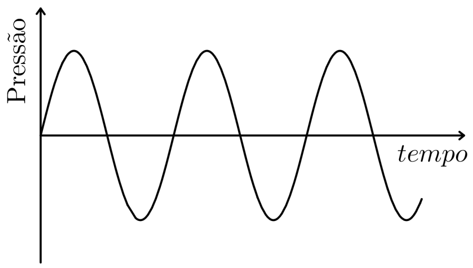
4.

Baixas	*graves*	*altas*	*som*	*agudos*

Altura do <u>*som*</u>

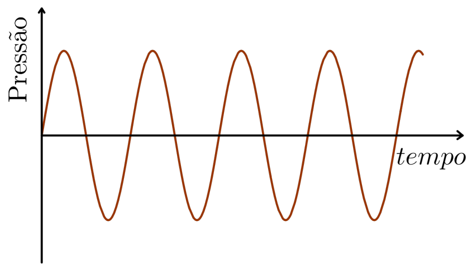
Sons <u>*graves*</u>

<u>*baixas*</u> *frequências*



Sons <u>*agudos*</u>

<u>*altas*</u> *frequências*

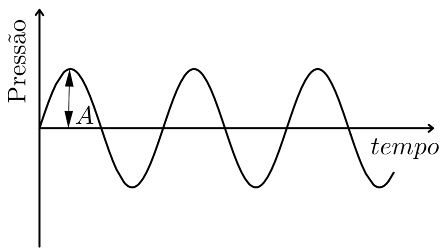


5.

menor amplitude	*fortes*	*maior amplitude*	*fracos*

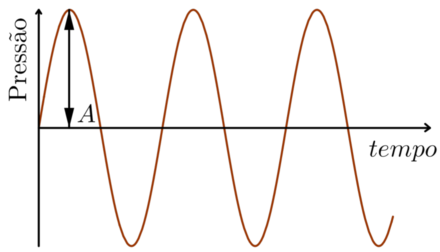
Intensidade do som

Sons <u>*fracos*</u>



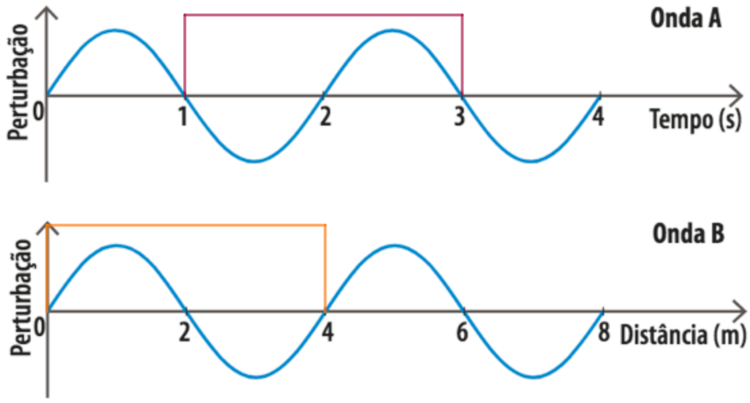
<u>*menor amplitude*</u>

Sons <u>*fortes*</u>



<u>*maior amplitude*</u>

6.



6.1. O período da onda A é 2 segundos.

6.2. O comprimento da onda B é 4 metros.

6.3. $f = \frac{1\,ciclo}{2\,s} = 0{,}5$

7. $f = \frac{1800}{4} = 450\ Hz$

Atividade 4- Altura do som versus comprimento de uma coluna de ar

1. Não, o som obtido não é sempre o mesmo.

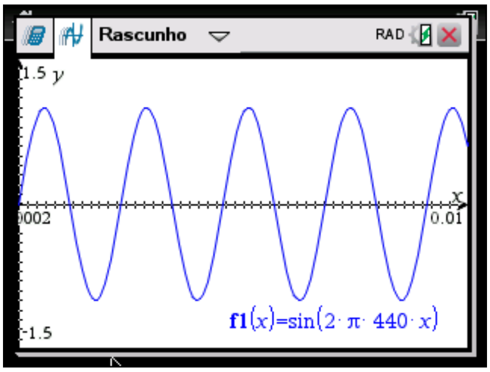
2. O som obtido não é sempre o mesmo porque o som depende da quantidade de água que cada garrafa contém. Quanto maior for a quantidade de água numa garrafa, menor será o comprimento da coluna de ar, produzindo-se desta forma um som mais agudo.

A garrafa que tem menor quantidade de água possui uma maior coluna de ar no seu interior, quando comparado à garrafa com maior quantidade de água, produzindo um som mais grave.

Atividade 5- Sons puros e sons compostos

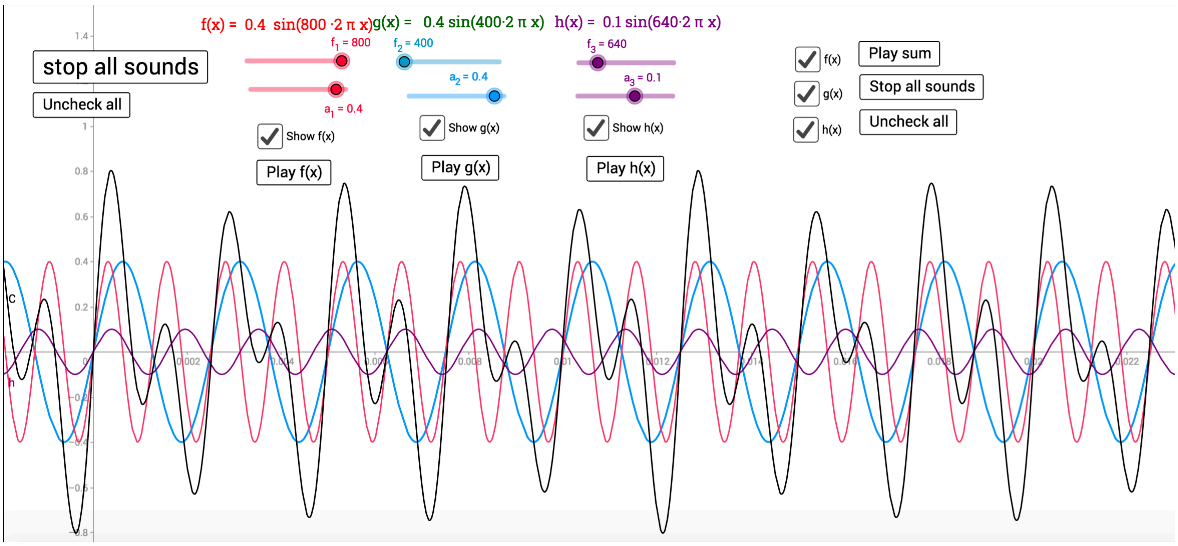
1. À medida que a frequência do som aumenta o gráfico “encolhe”, ou seja, diminui o período da função.

2.



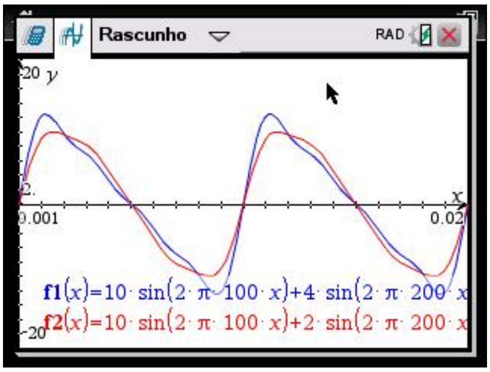
3. O período desta função é $0{,}002 \approx \frac{1}{440}$ segundos; significa que num segundo a onda completa 440 ciclos.

4. Neste exemplo pode observar-se a onda resultante, de cor preta, da soma das ondas representadas a vermelho, azul e roxo.



5. As frequências dos harmónicos superiores serão 220 Hz, 330 Hz e 440 Hz.

6.



7. A função f contém harmónicos superiores mais intensos do que a função g, representando assim o som tocado no violino. O som da flauta é mais pobre em harmónicos superiores, correspondendo por isso à função g.

Atividade 6 – Intensidade sonora e logaritmos

1. $NIS = 10log\frac{10^{-12}}{10^{-12}} = 10log1 = 10\times0 = 0$

2. $NIS = 10log\frac{10\times10^{-12}}{10^{-12}} = 10log10 = 10$

Se a intensidade do som aumentar dez vezes, o nível de intensidade sonora aumenta 1 dB.

3. $NIS = 10log\frac{100\times10^{-12}}{10^{-12}} = 10log100 = 10log10^2 = 10\times2 = 20$

4. $NIS = 10log\frac{1000\times10^{-12}}{10^{-12}} = 10log10^3 = 10\times3 = 30$

5. Quando a intensidade for 10^n vezes maior do que o 10^{-12} (limite da audição), o nível de intensidade sonora aumenta $10n$.

6. $85 = 10log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Leftrightarrow \frac{85}{10} = log(I\times10^{12}) \Leftrightarrow 8{,}5 = log(I) + log(10^{12}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8{,}5 - 12log(10) = log(I) \Leftrightarrow -3{,}5 = log(I) \Leftrightarrow I = 10^{-3{,}5} \Leftrightarrow I = 0{,}000316$

$$115 = 10log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Leftrightarrow \frac{115}{10} = log(I\times10^{12}) \Leftrightarrow 11{,}5 = log(I) + 12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -0{,}5 = log(I) \Leftrightarrow I = 0{,}316$$

O som produzido numa discoteca varia entre 0,000316 e 0,316 w/m^2.

Capítulo 3

Atividade 1 - Frações e figuras musicais

1.

1.1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 1.2. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ 1.3. $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ 1.4. $\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

1.5. $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ 1.6. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ 1.7. $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ 1.8. $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$

1.9. $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)$

2.

2.1. Propriedade comutativa da adição em $\mathbb{Q}$.

2.2. Propriedade associativa da adição em $\mathbb{Q}$.

Atividade 3 - Zarlino e o mesolábio

1.

1.1. Como as retas AE e BF são paralelas, assim como as retas BE e CF, os ângulos AEB e BFC têm a mesma amplitude.

Os ângulos EAB e FBC também têm a mesma amplitude, uma vez que se trata de ângulos correspondentes em retas paralelas.

Como os triângulos têm dois ângulos com a mesma amplitude, o critério de semelhança de triângulos AA permite concluir que os dois triângulos são semelhantes.

1.2. $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BF}}$

1.3. Como as retas AE e BF são paralelas, assim como as retas BE e CF, os ângulos AEB e BFC têm a mesma amplitude.

Os ângulos ABE e BCF também têm a mesma amplitude, uma vez que se trata de ângulos correspondentes em retas paralelas.

Como os triângulos têm dois ângulos com a mesma amplitude, o critério de semelhança de triângulos AA permite concluir que os dois triângulos são semelhantes.

1.4. $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}$

1.5. $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BF}} \Leftrightarrow \overline{AD} \times \overline{BF} = \overline{AE} \times \overline{BE}$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CF}} \Leftrightarrow \overline{BF} = \frac{\overline{AE} \times \overline{CF}}{\overline{BE}}$$

Conjugando estas duas equações vem:

$$\overline{AD}\times\frac{\overline{AE}\times\overline{CF}}{\overline{BE}} = \overline{AE}\times\overline{BE} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$$

1.6. $\frac{\overline{AD}}{\overline{BE}} = m \Leftrightarrow \overline{AD} = m\times\overline{BE}$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CF}} = m \Leftrightarrow \overline{CF} = \frac{\overline{BE}}{m} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{\overline{BE}}{m} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{2\overline{BE}}{m}$$

Conjugando as duas equações obtém-se:

$$m\times\overline{BE} = \frac{2\overline{BE}}{m} \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

ou seja, $m = \sqrt{2}$

2.

2.1. $\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CH}}$ e $\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}$

2.2. Da primeira proporção pode escrever-se:

$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BG}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BG}}$ e $\frac{\overline{BF}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CH}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{CH}}$

Da segunda tem-se:

$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{CG}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AF}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}}$ e $\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{DH}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BG}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{DH}}$

Conjugando estas proporções pode concluir-se que $\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{DH}}$.

2.3. Sejam $\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = m$; $\frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = m$ e $\frac{\overline{CG}}{\overline{DH}} = \mathrm{m}$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = m \Leftrightarrow \overline{BF} = \frac{\overline{AE}}{m}$$

$\frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = m \Leftrightarrow m\overline{CG} = \overline{BF} \Leftrightarrow m\overline{CG} = \frac{\overline{AE}}{m} \Leftrightarrow \overline{CG} = \frac{\overline{AE}}{m^2}$

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{DH}} = m \Leftrightarrow \overline{CG} = m\overline{DH} \Leftrightarrow \frac{\overline{AE}}{m^2} = m\overline{DH} \Leftrightarrow \overline{AE} = m^3\overline{DH} \Leftrightarrow 2\overline{DH} = m^3\overline{DH} \Leftrightarrow$$

$$m = \pm\sqrt[3]{2}$$

Então $m = \sqrt[3]{2}$, uma vez que se trata de um valor positivo.

3.

Procedendo de forma análoga à resolução dos exercícios anteriores, obtém-se $m = \sqrt[4]{2}$.

4. O valor da razão m quando se utiliza o mesolábio com dois retângulos é $\sqrt{2}$. Neste caso determina-se o valor de uma média proporcional.

Quando se utiliza o mesolábio com três retângulos obtêm-se duas médias proporcionais e o valor de m é $\sqrt[3]{2}$.

Ao utilizar o mesolábio com quatro retângulos foi possível determinar três médias proporcionais e, neste caso, o valor de m é $\sqrt[4]{2}$.

Extrapolando estes resultados para n retângulos, tais que os dois segmentos extremos estejam em proporção $\frac{a}{b}$, ao determinar $n-1$ médias geometricamente proporcionais, a razão m (valor das razões) é a n-ésima raiz de $\frac{a}{b}$, ou seja, $m = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Atividade 4- Mesolábio e as escalas de tons inteiros e cromática

1.

1.1. $\frac{1}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f} = \frac{f}{0,5}$

1.2. $m = \sqrt[6]{2}$

1.3. $\frac{1}{b} = \sqrt[6]{2} \Leftrightarrow b = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$

$\frac{b}{c} = \sqrt[6]{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{\sqrt[6]{2^2}}$ $\quad d = \frac{1}{\sqrt[6]{2^3}}$ $\quad e = \frac{1}{\sqrt[6]{2^4}}$ $\quad f = \frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}$

2.

2.1. $\frac{660}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f} = \frac{f}{g} = \frac{g}{h} = \frac{h}{i} = \frac{i}{j} = \frac{j}{l} = \frac{l}{m} = \frac{m}{330}$

2.2. $m = \sqrt[12]{2}$

2.3. $b = \frac{5}{\sqrt[12]{2}}$ $\quad c = \frac{5}{\sqrt[12]{2^2}}$ $\quad d = \frac{5}{\sqrt[12]{2^3}}$ $\quad e = \frac{5}{\sqrt[12]{2^4}}$

$f = \frac{5}{\sqrt[12]{2^5}}$ $\quad g = \frac{5}{\sqrt[12]{2^6}}$ $\quad h = \frac{5}{\sqrt[12]{2^7}}$ $\quad i = \frac{5}{\sqrt[12]{2^8}}$

$j = \frac{5}{\sqrt[12]{2^9}}$ $\quad l = \frac{5}{\sqrt[12]{2^{10}}}$ $\quad m = \frac{5}{\sqrt[12]{2^{11}}}$

Atividade 5 - Alguns cálculos matemáticos a partir de uma partitura

1. Se num minuto se executam 100 semínimas, no mesmo tempo vão executar-se $\frac{100}{4}$ = 25 semibreves, $\frac{100}{2} = 50$ mínimas e $100 \times 8 = 800$ fusas. Portanto uma semibreve vai durar $\frac{60}{25} = 2{,}4\ seg$, cada breve dura $\frac{60}{50} = 1{,}2 seg$ e cada fusa $\frac{60}{800} = 0{,}075 seg$.

2. $47 compassos \times 4 semínimas \times \frac{1}{124} minutos \approx 1{,}52 min \approx 91 seg$

Atividade 6 - Aritmética na música

1.

$f(Dó_5)$- $f(Dó_4)$ =523,25-261,63=261,632

$f(Dó_6)$- $f(Dó_5)$= 1046,50-523,25=523,25

$f(Dó_5) \div f(Dó_4)$ =523,25:261,63≈2

$f(Dó_6) \div f(Dó_5)$ =1046,50:523,26≈2

2. $int(Dó_4, Mi_4) = \frac{329{,}63}{261{,}63} \approx 1{,}26$ $\qquad$ $int(Mi_4, Sol_4) = \frac{391{,}99}{329{,}63} \approx 1{,}19$

$int(Dó_4, Sol_4) = \frac{391{,}99}{261{,}63} \approx 1{,}50$

$$int(Dó_4, Mi_4) + int(Mi_4, Sol_4) = 1{,}26 + 1{,}19 = 2{,}45$$

2.1.

2.1.1. $int(Dó_4, Dó\#_4) \oplus int(Dó\#_4, Mi_4) = \frac{329{,}63}{261{,}63} = 1{,}25991$

2.1.2. $int(Dó_4, Mi_4) \ominus int(Ré_4, Mi_4) = \frac{329{,}63}{261{,}63} \div \frac{261{,}63}{293{,}66} = \frac{96799{,}1}{68450{,}3} = 1{,}41415$

2.1.3. $int(Fá_4, Sol_4\#) \otimes 3 = \left(\frac{415{,}30}{349{,}23}\right)^3 = 1{,}68171$

Duas notas que estão à distância deste intervalo são, por exemplo, Fá e Si.

2.1.4. $[int(Dó_4, Fá\#_4] \oslash 3 = \sqrt[3]{\frac{369{,}99}{261{,}63}} = \sqrt[3]{1{,}41417} = 1{,}12245$

Duas notas que estão à distância deste intervalo são, por exemplo, Dó e Ré.

2.2. $int(Dó_4, Dó_5) \oslash 6 = \sqrt[6]{\frac{524{,}25}{261.63}} = \sqrt[6]{2}$

3. $int(Dó_4, Ré_4) = \frac{293{,}66}{261{,}63} \approx \sqrt[6]{2}$

$$int(Ré_4, Mi_4) = \frac{329{,}63}{293{,}66} \approx \sqrt[6]{2}$$

$$int(Dó_4, Mi_4) = \frac{329{,}63}{261{,}63} \approx \sqrt[3]{2}$$

$$\log(int(Dó_4, Ré_4)) + \log(int(Ré_4, Mi_4)) = log\sqrt[6]{2} + log\sqrt[6]{2}$$
$$= \log\left(\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{2}\right) = log\sqrt[6]{2^2} = log\sqrt[3]{2} = \log\,(\mathrm{int}(Dó_4, Mi_4))$$

4.

4.1. Em primeiro lugar é necessário verificar que a função é bijetiva.

A função v é uma função injetiva, uma vez que a objetos diferentes correspondem imagens diferentes, isto é, $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow v(x_1) \neq v(x_2)$

A função v é sobrejetiva, uma vez que o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada, ou seja, $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in D: v(x) = y$.

Uma vez que a função é injetiva e sobrejetiva pode afirmar-se que se trata de uma função bijetiva, logo admite função inversa.

4.2. Junção de duas terceiras:

$$v(3^{\text{a}}) + v(3^{\text{a}}) = (3-1) + (3-1) = 4 = v(5^{\text{a}})$$

Junção de duas quartas:

$$v(4^{\text{a}}) + v(4^{\text{a}}) = (4-1) + (4-1) = 6 = v(7^{\text{a}})$$

4.3. Sobreposição de três terceiras:

$$v(3^{\text{a}}) + v(3^{\text{a}}) + v(3^{\text{a}}) = (3-1) + (3-1) + (3-1) = 6 = v(7^{\text{a}})$$

4.4. $i_1 \ddagger i_2 = v^{-1}[v(i_1) + v(i_2)]$

$3^{\text{a}} \ddagger 4^{\text{a}} = v^{-1}[v(3^{\text{a}}) + v(4^{\text{a}})] = v^{-1}[2+3] = v^{-1}[5] = 6^{\text{a}}$

Atividade 7 - Progressões na música

1.

1.1. Uma vez que, na escala cromática, os notas se encontram igualmente espaçadas entre si, por um intervalo de meio tom, a sequência das frequências das notas pode ser encarada como uma progressão geométrica.

1.2.1.

$$a_{13} = a_1 \times r^{13-1} \Leftrightarrow r^{12} = \frac{440}{220} \Leftrightarrow r = \sqrt[12]{2}$$

1.2.2.

$$a_n = 220 \times \left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1}$$

Nota	Lá	Lá#	Si	Dó	Dó	Ré	Ré#	Mi	Fá	Fá#	Sol	Sol#	Lá
Frequência	220	233,1	246,9	261,6	277,2	293,7	311,1	329,6	349,2	370,0	392,0	415,3	440

2.

2.1. Os logaritmos das razões de frequências da escala cromática formam uma progressão aritmética. O mesmo acontece para qualquer sucessão que se obtenha a partir duma progressão geométrica, tomando os logaritmos dos respetivos termos.

Capítulo 4

Atividade 1 – O violino e a proporção áurea

	violino 1/4	violino 4/4
a_1	20,5	23
a_2	32	35
b_1	12	13,5
b_2	19,1	20,3
c_1	7,3	7,6
c_2	11,8	12,4

	violino 1/4	violino 4/4
$\frac{a_1 + a_2}{a_2}$	1,64063	1,65714
$\frac{a_2}{a_1}$	1,56098	1,52174
$\frac{b_2}{b_1}$	1,59167	1,5037
$\frac{b_2}{c_2}$	1,61864	1,6129
$\frac{c_2}{c_1}$	1,61644	1,6371

Observando a segunda tabela pode constatar-se que as razões obtidas se aproximam do número de ouro.

Atividade 2 - Os ritmos e os números de Fibonacci

1.

	Nº de tempos					
	1	2	3	4	5	6
	♩	♩♩ 𝅗𝅥	♩♩♩ ♩𝅗𝅥 𝅗𝅥♩	♩♩♩♩ ♩♩𝅗𝅥 ♩𝅗𝅥♩ 𝅗𝅥♩♩ 𝅗𝅥𝅗𝅥	♩♩♩♩♩ ♩♩♩𝅗𝅥 ♩♩𝅗𝅥♩ ♩𝅗𝅥♩♩ 𝅗𝅥♩♩♩ 𝅗𝅥𝅗𝅥♩ 𝅗𝅥♩𝅗𝅥 ♩𝅗𝅥𝅗𝅥	♩♩♩♩♩♩ ♩♩♩♩𝅗𝅥 ♩♩♩𝅗𝅥♩ ♩♩𝅗𝅥♩♩ ♩𝅗𝅥♩♩♩ 𝅗𝅥♩♩♩♩ 𝅗𝅥𝅗𝅥♩♩ ♩♩𝅗𝅥𝅗𝅥 ♩𝅗𝅥𝅗𝅥♩ 𝅗𝅥♩♩𝅗𝅥 ♩𝅗𝅥♩𝅗𝅥 𝅗𝅥♩𝅗𝅥♩ 𝅗𝅥♩𝅗𝅥 𝅗𝅥𝅗𝅥𝅗𝅥
Nº total de combinações	1	2	3	5	8	13

2. Uma análise detalhada desta sucessão, permite concluir que se trata da sucessão dos números de Fibonacci, com exceção do primeiro termo.

3. Tratando-se da sucessão dos números de Fibonacci é sabido que, para obter um termo, é necessário somar os dois termos anteriores.

Em termos musicais pode pensar-se da seguinte forma.

Considere-se o termo u_5. Com cinco tempos podem formar-se oito ritmos diferentes.

♩♩♩♩♩ ♩♩𝅗𝅥♩ 𝅗𝅥♩♩♩ ♩𝅗𝅥♩♩ 𝅗𝅥𝅗𝅥♩

♩♩♩𝅗𝅥 𝅗𝅥♩𝅗𝅥 ♩𝅗𝅥𝅗𝅥

Repare-se que destes 8 ritmos, 5 terminam com uma semínima e 3 com uma mínima. No fundo, os 8 ritmos em causa são os 5 ritmos do termo u_4 aos quais se acrescentou uma semínima no final, mais os três ritmos do termo u_3 aos quais se acrescentou uma mínima no final.

Termos de ordem 4:

♩♩♩♩ ♩𝅗𝅥♩ 𝅗𝅥♩♩

♩♩𝅗𝅥 𝅗𝅥𝅗𝅥

Termos de ordem 3:

♩♩♩ 𝅗𝅥♩ ♩𝅗𝅥

Na verdade qualquer termo da sucessão (u_n) obtém-se considerando os ritmos do termo anterior (em número u_{n-1}) acrescidos duma semínima no final, mais os ritmos do termo de ordem $n-2$ (em número u_{n-2}) aos quais se acrescentou uma mínima no final. Não existem mais ritmos possíveis de duração n tempos:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

4.

4.1. Sim, as combinações apresentadas aparecem no triângulo de Pascal, ao longo das diagonais “inclinadas”.

4.2. (B)

Capítulo 5

Atividade 2- Elaboração de partituras

1.

1.1.

Efetuou-se uma reflexão vertical.

1.2.

Entre as duas melodias efetua-se uma reflexão deslizante de eixo e vetor verticais.

Esta frase a duas vozes não possui simetria. Para podermos identificar uma simetria de reflexão deslizante seriam necessárias várias isometrias deste tipo e não apenas uma.

2.

Na realização desta tarefa efetuaram-se translações oblíquas.

Atividade 3- Análise de partituras

a)

A isometria presente neste excerto é uma translação vertical (nas alturas).

b)

A isometria presente neste excerto é uma translação horizontal (no tempo) que é executada por duas vezes.

c)

A isometria utilizada é uma reflexão deslizante de eixo horizontal, o que em música se designa por cânone invertido, ou cânone por movimento contrário.

Capítulo 6

Atividade 1 – Jogo de dados de Mozart

1.

1.1. O número de compasso é calculado da seguinte forma:

Há onze somas diferentes ao lançar dois dados (caso seja necessário poderá construir-se uma tabela de dupla entrada). Como o lançamento dos dados é efetuado dezasseis vezes tem-se $11 \times 16 = 176$ compassos.

1.2. Para o primeiro lançamento há 11 possibilidades, para o segundo lançamento também há 11 possibilidades, ..., para o décimo sexto lançamento há 11 possibilidades, logo, como os acontecimentos são independentes pode escrever-se

$$11 \times 11 \times 11 \times \ldots \times 11 = 11^{16}$$

A ordem de grandeza do número total de minuetos que se podem formar é:

$$11^{16} = 45\,949\,729\,863\,572\,161 \approx 4{,}6 \times 10^{16}$$

1.3. Seriam necessários:

$4{,}6 \times 10^{16} \div 60 \approx 7{,}7 \times 10^{14}$ minutos;

$7{,}7 \times 10^{14} \div 60 \approx 1{,}2 \times 10^{13}$ horas;

$1{,}2 \times 10^{13} \div 24 \approx 5{,}3 \times 10^{11}$ dias;

$5{,}3 \times 10^{11} \div 365 \approx 1{,}5 \times 10^{9}$ anos.

1.4. A probabilidade de, ao jogar o jogo duas vezes, se obterem dois minuetos iguais é praticamente nula.

$$P(2\ minuetos\ iguais) = \frac{1}{11} \times \frac{1}{11} \times \ldots \times \frac{1}{11} = \left(\frac{1}{11}\right)^{16} \approx 2{,}176 \times 10^{-17}$$

2.

2.1.

2.1.1. $A_4^6 = 360$

2.1.2. $6^4 = 1296$

2.2.

2.2.1. $A_3^6 = 120$

2.2.2. Considere-se a sequência que um dos alunos pode compor A_1 A_2 A_3 e B_1 B_2 B_3 a sequência que o outro aluno pode obter.

A probabilidade pretendida é:

$$P(A_1 = B_1 \cup A_2 = B_2 \cup A_3 = B_3) =$$

$$= P(A_1 = B_1) + P(A_2 = B_2) + P(A_3 = B_3) - P(A_1 = B_1 \cap A_2 = B_2)$$

$$- P(A_2 = B_2 \cap A_3 = B_3) - P(A_1 = B_1 \cap A_3 = B_3) +$$

$$P(A_1 = B_1, A_2 = B_2, A_3 = B_3) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{6} - \frac{3}{30} + \frac{1}{120} = \frac{60 - 12 + 1}{120} = \frac{49}{120}$$

Atividade 2- Claping music

Ao longo da obra decorrem 12x4=48 compassos.

Ao todo são executados 13x4=52 compassos.

Bibliografia

Abdounur, J. (2004). *Matemática e Música: O pensamento analógico na construção de significados*. São Paulo: Escrituras Editora e Distribuidora de Livros.

Aleph, F. (2013). *How to compose a song with the golden ratio and the Fibonacci sequence*. Disponível em http://www.faena.com/aleph/articles/how-to-compose-a-song-with-the-golden-ratio-and-the-fibonacci-sequence

Almeida, J. (2012). *Violas de Arame Portuguesas-Medidas para construção*. Disponível em http://www.jose-lucio.com/MEDIDAS/Medidas.htm

Andrade, C., Pereira, P. & Pimenta, P. (2015). Novo Ípsilon 10. Lisboa: Raiz Editora.

Arbonés, J & Milrud, P. (2011). *A Harmonia é Numérica, Música e Matemática*. RBA Coleccionables, S. A.

Assayag, G & Feichtinger, H. G. & Rodrigues, J. F. (2002). *Mathematics and Music: A Diderot Mathematical Forum*. Spinger. Disponível em http://www.springer.com/us/book/9783540437277

A origem das coisas. (2017). *A origem do violino*. Retirado de http://origemdascoisas.com/a-origem-do-violino/.

Carrión, V. & Llopis, T. (2008). "*Música y Matemáticas, La Armonía de los números*". (Federación Espanola de Sociedades de Profesores de Matemáticas). Disponível em: https://matesnoaburridas.files.wordpress.com/2010/11/cuadernillo-musica-y-matematicas-dia-escolar.pdf

Cervo, D. (2005). *Per Musi*. Revista Académica de Música, (11) 44-59. Disponível em: http://www.musica.ufmg.br/permusi/port/numeros/11/num11_cap_03.pdf

Corbalán, F. (2010). *A proporção Áurea: A linguagem matemática da beleza*. National Geographic, Edição Especial Matemática, 18-42.

Correia, O. & Passos, I. (2016). *Matemática em ação 8, Matemática 8º ano de escolaridade*. Lisboa: Raiz Editora.

Costa, B. & Rodrigues, E. (2016). *Novo Espaço, Matemática 7º ano*. Porto: Porto Editora.

Costa, B. & Rodrigues, E. (2011). *Novo Espaço, Matemática A 11º ano*. Porto: Porto Editora.

Costa, B. & Rodrigues, E. (2012). *Novo Espaço, Matemática A 12º ano*. Porto: Porto Editora.

Eves, H. (1995). *Introdução à História da Matemática*. Editora Unicamp.

Gardner, H. (2002). Estruturas da Mente: a teoria das inteligências múltiplas. Editora Artes Médicas Sul.

Gend, R. (2014). *The Fibonacci sequence and the golden ratio in music.* Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, (20) 72-77. Disponível em http://nntdm.net/papers/nntdm-20/NNTDM-20-1-72-77.pdf

Gibson, B. (2017). *Workshop Matemática e Arte*. Disponível em http://www.spmsul.uevora.pt/oradores_workshop2017.pdf

Harkleroad, L. (2006). *The Math Behind the Music*. Cambridge University Press.

Heath, T. (1931). *A history of Greek mathematics,* (1). Oxford: Oxford University Press.

Hill, L. (2004). *"Make a Music Clock"*. Disponível em https://www.mamaslearningcorner.com/

Hofstadter, D. (2000). *Godel, Escher, Bach, Laços Eternos*. Lisboa: Gradiva.

Massin, B. & J. (1983). *Histoire de la Musique Occidentale*. Messidor - Temps Actuels.

Mol, R. (2013). Introdução à História da Matemática. Belo Horizonte.

Neves, M., Pereira, A. & Silva, J. (2011). *Matemática A, 11º ano*. Porto: Porto Editora.

Nougué, C. (2011, Novembro 27). *A boa música*. Disponível em http://www.aboamusica.com.br/2011/11/o-que-e-o-sistema-temperado.html

Ribeiro, L. (2016). *Johann Sebastian Bach e a fascinante relação entre música e matemática*. Disponível em http://notaterapia.com.br/2016/07/12/johann-sebastian-bach-e-fascinante-relacao-entre-musica-e-matematica/

Rodrigues, J. (1999). *A Matremática e a Música numa perspetiva histórica*. Revista de Cultura Científica Colóquio/Ciências, (23) 17-32. Disponível em http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/MatMus_99.pdf

Rossi, C. & Russo, F. (2009). Ancient Engineers' Inventions: Percursors of the Present. Springer.

Simões, C. (2008). *Padrões matemáticos na obra de Mozart*, Encontro Música e Matemática-Atas. Universidade do Porto e Casa da Música, 64-76.

Solomon, L. (1973). *Bartok's Music for Strings, Percussion and Celeste*. Disponível em http://solomonsmusic.net/diss7.htm.

Tavares, L. (2002). *Música sacra e adoração. Matemática na Música*. Disponível em https://musicaeadoracao.com.br/25406/matematica-na-musica-capitulo-3/

Urreiztieta, C. (2013). *El Monocordio como Instrumento Científico*. (Tese de Doutoramento, Universitat Pompeu Fabra, Barcelona). Disponível em http://www.tesisenred.net/bitstream/handle/10803/126116/tccu.pdf?sequence=1

Viegas, C. & Valente, S. (2015). *Mat 10*. Lisboa: Texto Editores.

Wikipedia (2016). *Epitáfio de Sicílio*. Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Epit%C3%A1fio_de_S%C3%ADcilo